巍巍交大　百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn

策划编辑　金颖杰
责任编辑　胡思佳
封面设计　刘文东

服务热线：400-615-1233
配套精品教学资料包
www.huatengedu.com.cn

扫描二维码
关注上海交通大学出版社
官方微信

ISBN 978-7-313-29796-9

定价：45.00元

高等职业教育公共基础课系列教材

新标准教材

经济数学

JINGJI SHUXUE

主编　吴晓明

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高等职业教育公共基础课系列教材

经济数学

JINGJI SHUXUE

主　编　吴晓明

副主编　张淑英　王春杰

池晶晶　黄志伟

上海交通大学出版社

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书适应国家职业教育教学改革要求，坚持以学生为中心的原则进行编写. 全书共分为七章，主要内容包括函数、极限与连续、一元函数的导数与微分、微分中值定理及导数的应用、一元函数积分及其应用、线性代数初步、概率论初步. 本书旨在促进学生数学核心素养的养成和发展，提高学生运用数学知识和方法发现与提出问题、分析与解决问题的能力.

本书既可作为高等职业院校财经商贸大类各专业学生数学课程的教材，也可作为相关人士的学习资料.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学 / 吴晓明主编. — 上海 ：上海交通大学出版社，2024.7

ISBN 978-7-313-29796-9

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①经济数学 Ⅳ. ①F224.0

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 001265 号

经济数学

JINGJI SHUXUE

主　　编：吴晓明

出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号

邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208

印　　制：三河市骏杰印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店

开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　　印　　张：15

字　　数：364 千字

版　　次：2024 年 7 月第 1 版　　印　　次：2024 年 7 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-29796-9　　电子书号：ISBN 978-7-89424-769-8

定　　价：45.00 元

版权所有　侵权必究

告读者：如您发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话：0316-3662258

前言

党的二十大报告指出:“加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设,加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科.”经济数学是高等职业院校财经商贸大类各专业学生的基础课程和专业课程,可以培养学生的运算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力,为学生学习专业知识、掌握职业技能和终身发展奠定基础.

本书适应国家职业教育教学改革要求,坚持以学生为中心的原则进行编写.全书共分为七章,主要内容包括函数、极限与连续、一元函数的导数与微分、微分中值定理及导数的应用、一元函数积分及其应用、线性代数初步、概率论初步.

本书具有以下特点.

1. 融入育人元素

本书以党的二十大精神为指导,遵循《高等学校课程思政建设指导纲要》的要求,落实立德树人根本任务,设置了数学文化栏目,注重培养学生的道德品质、科学精神和工匠精神,体现社会主义核心价值观和四个自信,引导学生树立正确的世界观、人生观、价值观.

2. 突出实践能力的培养

本书将数学基础知识与经济生活的综合应用有机地融合在一起,设置了数学应用栏目,体现数学知识专业化、经济问题数学化.在提升学生学习兴趣的同时,增强教材内容的实用性、职业性和先进性.

3. 教学内容、评价标准设置合理

本书内容符合教情、学情,基础性理论覆盖完整,能准确传达本课程应包含的知识和能力要素.内容循序渐进、层次分明,突出重点、难点.每节设置习题,每章设置复习题,题量、题型、难度设置合理.每章的复习题分为基础题和提高题,以满足分层教学的需要.

4. 配套信息化学习资源

本书采用二维码的形式,将知识点与视频相结合,满足弹性教学需要;既支持网络化、多媒体及线上教学等现代教学方式,也便于学生自学,提高学习成效.

本书由山东外贸职业学院吴晓明任主编,由山东外贸职业学院张淑英、王春杰、池晶晶,广东南华工商职业学院黄志伟任副主编,山东外贸职业学院潘瑛芳、李海燕、于蕴、朱应丽参与了编写。

编者在编写本书过程中参考了一些相关教材及资料,在此向相关作者表示诚挚的谢意!

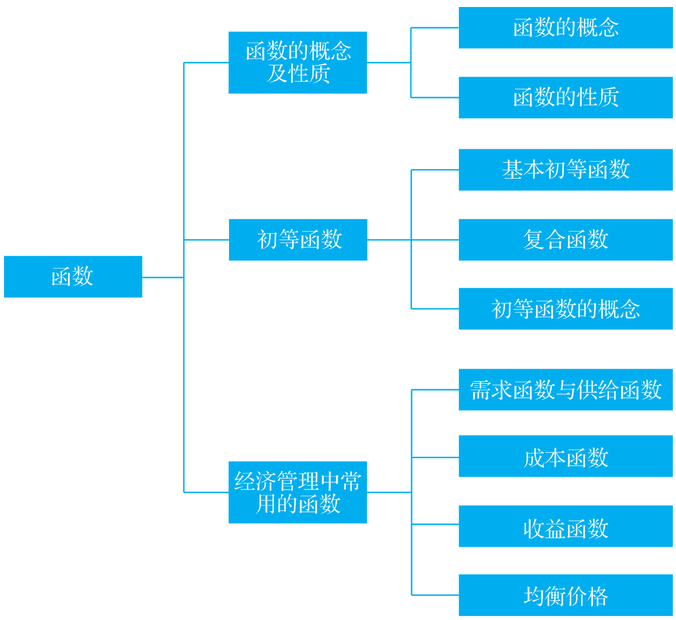
由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

目录

第 1 章

函　　数



重点与难点

1. 函数的概念和性质.
2. 基本初等函数的图像和性质.
3. 复合函数和初等函数的构成.
4. 常用的经济函数,包括需求函数、供给函数、成本函数和收益函数.

1.1　函数的概念及性质

1.1.1　函数的概念

在实际问题中,经常会遇到两类不同的量,一类在所考察的过程中不发生变化,只取一个固定的值,称为**常量**;另一类在所考察的过程中是变化的,可以取不同的数值,称为**变量**.各变量之间往往是相互联系的,一个变量随另一个变量的变化而变化,这种关系通常表现为变量取值的对应关系,即**函数关系**.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的非空数集，如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的法则 f 都有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**（或**函数**），数集 D 称为函数的**定义域**，f 称为函数的**对应法则**.

当 x 取确定数值 $x_0\in D$ 时，通过法则 f，函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记为

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

微课：
函数的概念-xtah5c

定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数为相同的函数.

有时一个函数要用几个式子表示，如 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$ 这种在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**. 它仍然是一个函数，而不是几个函数，因为它符合一个函数的定义，只不过在定义域的不同部分用不同的式子来表示. 在计算分段函数的函数值时，应按对应于定义域的不同部分的不同表达式进行计算.

1.1.2 函数的性质

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义（区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或定义域的一部分），则函数一般具有下列几种特性.

微课：
函数的性质-i2ivua

1. 单调性

若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（或**单调减少**）. 区间 I 称为**单调增区间**（或**单调减区间**）；单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**. 单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**. 如果函数 $y=f(x)$ 在它的定义域上单调增加（或单调减少），就说它是单调增加函数（或单调减少函数）. 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数.

一般地，单调增加函数的图像为沿 x 轴正向单调上升的曲线，如图 1-1 所示；单调减少函数的图像为沿 x 轴正向单调下降的曲线，如图 1-2 所示.

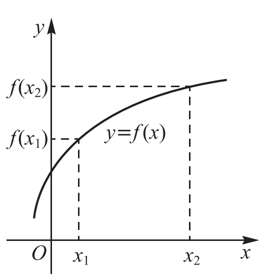


图 1-1

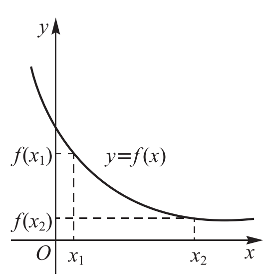


图 1-2

例如，$y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加函数；$y=x^2$ 在$(-\infty,0]$内是单调减少函数，在$[0,+\infty)$内是单调增加函数，在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

注意　讨论函数的单调性，必须先指明自变量 x 所在的区间.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义区间 I 关于原点对称，若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$是区间 I 上的**偶函数**；若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数$f(x)$是区间 I 上的**奇函数**. 既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为**非奇非偶函数**.

偶函数 $f(x)$的图像关于 y 轴对称（见图 1-3）；奇函数的图像关于原点对称（见图 1-4）. 例如，$y=x^3+\sin x$ 为奇函数，$y=\cos x$ 为偶函数，$y=x^2+x$ 为非奇非偶函数.

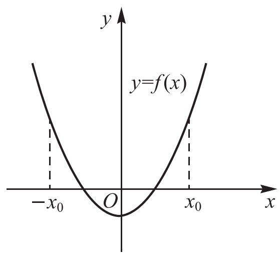


图 1-3

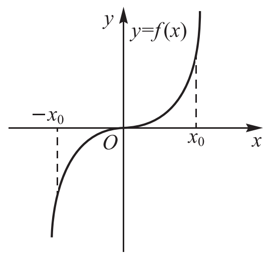


图 1-4

3. 周期性

如果存在不为零的实数 T，使得对于任意的 $x\in I$，$x+T\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$是**周期函数**，T 是 $y=f(x)$的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例如，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

4. 有界性

如果存在正数 M，使对任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上**有界**，否则称 $f(x)$在区间 I 上无界.

从图形上看，有界函数的图像介于两条直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间（见图 1-5）. 例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，恒有$|\sin x|\leqslant 1$；而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界，但在区间$(1,2)$内有界.

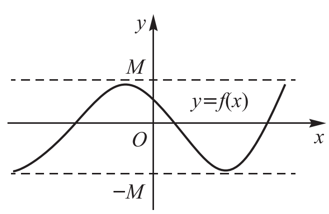


图 1-5

注意　讨论函数的有界性，必须先指明自变量 x 所在的区间.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{3x}{x^2-2x}$；

(2) $y=\sqrt{x^2-3x-4}$；

(3) $y=\frac{\ln(2x+4)}{\sqrt{3-x}}$；

(4) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}, g(x)=x-1$；

(2) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(4) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^4-2x^2$；

(2) $f(x)=x\sin x$；

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;　　　　(4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x-2, & -\infty<x<1, \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4, \\ \ln x, & 4<x<+\infty, \end{cases}$ 求 $f(x)$的定义域,并计算 $f(-2)$,$f(1)$,$f(2)$,$f(5)$.

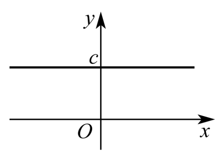
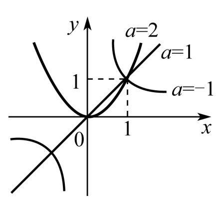
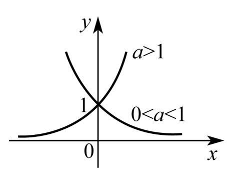
1.2　初 等 函 数

微课：
基本初等函数-p5s3wk

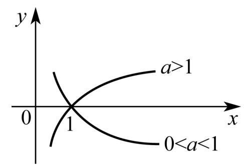
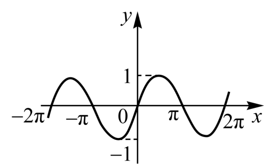
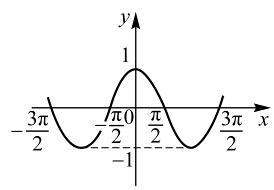
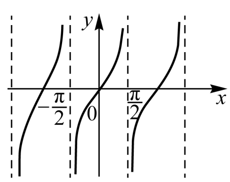
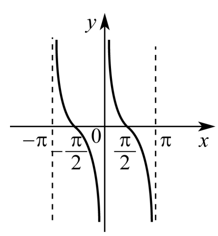
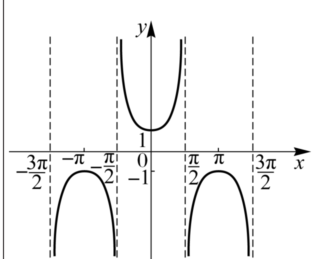
1.2.1　基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**. 为后面学习方便,现对这六类基本初等函数的表达式、定义域、值域、图像、性质进行归纳总结(见表 1-1).

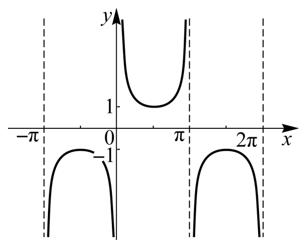
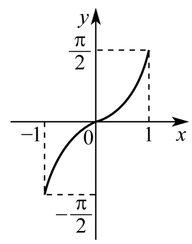
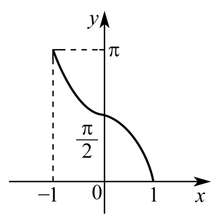
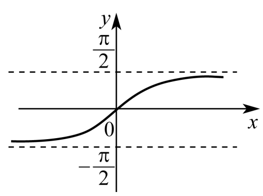
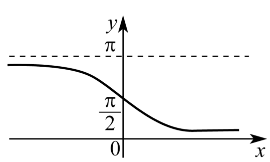
表 1-1

函数表达式	定义域和值域	图　　像	性　　质
常数函数 $y=c$ (c 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{c\}$		有界、偶函数
幂函数 $y=x^a$ (a 为常数)	定义域和值域由 a 的取值决定,但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		在第一象限内,当 $a>0$ 时,单调增加;当 $a<0$ 时,单调减少
指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$, a 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		图像过点(0,1),在 x 轴上方. 当 $0<a<1$ 时,单调减少;当 $a>1$ 时,单调增加

（续表）

<table>
<tr><th colspan="2">函数表达式</th><th>定义域和值域</th><th>图　　像</th><th>性　　质</th></tr>
<tr><td colspan="2">对数函数 $y=\log_a x$
（$a>0$ 且 $a\neq1$，
a 为常数）</td><td>$x\in(0,+\infty)$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>图像过点（1，0），在 y 轴右侧。当 $0<a<1$ 时，单调减少；当 $a>1$ 时，单调增加</td></tr>
<tr><td rowspan="6">三角函数</td><td>正弦函数
$y=\sin x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in[-1,1]$</td><td>
</td><td>奇函数，有界，周期为 2π，在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加，在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）内单调减少</td></tr>
<tr><td>余弦函数
$y=\cos x$</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in[-1,1]$</td><td>
</td><td>偶函数，有界，周期为 2π，在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 内单调增加，在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$（$k\in\mathbf{Z}$）内单调减少</td></tr>
<tr><td>正切函数
$y=\tan x$</td><td>$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>奇函数，无界，周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加</td></tr>
<tr><td>余切函数
$y=\cot x$</td><td>$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$
$y\in(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td><td>奇函数，无界，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少</td></tr>
<tr><td>正割函数
$y=\sec x$</td><td>$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$
$y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$</td><td>
</td><td>偶函数，无界，周期为 2π，在 $\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)\cup\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）内单调减少</td></tr>
</table>

（续表）

函数表达式		定义域和值域	图　　像	性　　质
三角函数	余割函数 $y=\csc x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$		奇函数，无界，周期为 2π，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\pi\right)\cup\left(2k\pi+\pi,2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi\right)\cup\left(2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		图像过原点，奇函数，有界，单调增加
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		有界，单调减少
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		图像过原点，奇函数，有界，单调增加
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		有界，单调减少

1.2.2　复合函数

定义　若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U_1，函数 $u=g(x)$ 的值域为 U_2，其中 $U_2\subseteq U_1$，则 y 通过 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，记作 $y=f[g(x)]$，其中 u 称为中间变量.

注意　(1)不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.例如,$y=\sqrt{u}$ 和 $u=-x^2-2$ 就不能复合成一个复合函数.

(2)复合函数可以由两个及两个以上的函数复合而成,中间变量可以用 u,v,w 等表示.

例 1　写出下列函数所构成的复合函数.

(1)$y=\sqrt{u},u=2x^2+5$;　(2)$y=\ln u,u=4-v^2,v=\cos x$.

解　(1)$y=\sqrt{u}$ 和 $u=2x^2+5$ 构成复合函数 $y=\sqrt{2x^2+5}$.

(2)$y=\ln u,u=4-v^2$ 与 $v=\cos x$ 构成复合函数 $y=\ln(4-\cos^2 x)$.

例 2　指出下列函数的复合过程.

(1)$y=\sin(x^2+4)$;　(2)$y=5^{\cot\frac{1}{x}}$;

(3)$y=\left(\arcsin\dfrac{x}{5}\right)^3$;　(4)$y=\log_3\cos\sqrt{x^2+1}$.

解　(1)$y=\sin(x^2+4)$可以看成由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2+4$ 复合而成.

(2)$y=5^{\cot\frac{1}{x}}$可以看成由 $y=5^u,u=\cot v$ 和 $v=\dfrac{1}{x}$复合而成.

(3)$y=\left(\arcsin\dfrac{x}{5}\right)^3$ 可以看成由 $y=u^3,u=\arcsin v$ 和 $v=\dfrac{x}{5}$复合而成.

(4)$y=\log_3\cos\sqrt{x^2+1}$ 可以看成由 $y=\log_3 u,u=\cos v,v=\sqrt{w}$ 和 $w=x^2+1$ 复合而成.

1.2.3　初等函数的概念

由基本初等函数及常数经过有限次四则运算和有限次复合而成,并且可用一个数学式子表示的函数叫作初等函数.

例如,$y=\sqrt{\ln 5x-3^x+\sin^2 x}$,$y=\dfrac{\sqrt[3]{2x}+\tan 3x}{x^2\sin x-2^{-x}}$都是初等函数.

微课:
初等函数-rrrwcj

习题 1-2

1. 写出下列函数所构成的复合函数.

(1)$y=u^2,u=\sin x$;　(2)$y=\cos u,u=x^5$;

(3)$y=e^u,u=x^2$;　(4)$y=u^5,u=\sin v,v=3x$;

(5)$y=\sqrt{u},u=1+x^2$;　(6)$y=\ln u,u=\sqrt{2+v},v=x^2$.

2. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos 3x$；

(2) $y=(3x+2)^5$；

(3) $y=e^{\frac{1}{x}}$；

(4) $y=e^{\sin^3 x}$；

(5) $y=\arcsin[\ln(2x+1)]$；

(6) $y=\ln[\sin(2x+3)]$；

(7) $y=\ln\ln\sin x$；

(8) $y=5^{\ln(x^2-1)}$.

3. 已知 $f(x)=x^3-x, g(x)=\sin 2x$，求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & |x|>1,\\ 1, & |x|\leqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ 求 $g[f(x)]$.

1.3　经济管理中常用的函数

微课：
函数的应用 1-sxuwz5

1.3.1　需求函数与供给函数

定义 1　在一定的价格条件下，消费者愿意购买且有支付能力购买的商品量称为**需求**. 作为市场中的一种商品，消费者对它的需求受诸多因素的影响，如该商品的价格、消费者的收入、消费者的偏好等. 为了讨论方便，我们忽略其他因素，假定市场需求量只与该商品的价格有关，即

$$q_d = f(p).$$

其中，q_d 是商品的需求量，p 是商品的价格. 作为商品价格 p 的函数，商品的需求量一般来说随商品价格的上升而减少，随商品价格的下降而增加，即需求函数 $q_d = f(p)$ 一般是单调减少函数.

在实际应用中，常常根据所得到的价格与需求的数据(p, q_d)，用一些简单的初等函数曲线来拟合，从而建立经验曲线. 如

线性函数

$$q_d = b - ap\ (a, b > 0),$$

指数函数

$$q_d = a\mathrm{e}^{-bp}\ (a, b > 0).$$

定义 2　在一定价格条件下，生产者愿意出售且有可供出售的商品量称为**供给**. 生产者的供给量也是受多种因素影响的，如商品的价格、生产者生产商品所付出的成本等. 我们也忽略其他因素，将供给量看作商品价格的函数. 由于生产者向市场提供商品的目的是赚取利润，一般来讲，供给量会随着市场价格的上涨而增加，即供给函数是单调增加函数. 下面给出几种常见的供给函数.

线性函数

$$q_s = \varphi(p) = ap - b\ (a, b > 0),$$

幂函数

$$q_s = \varphi(p) = kp^a\ (k, a > 0),$$

指数函数

$$q_s = \varphi(p) = a\mathrm{e}^{bp}\ (a, b > 0).$$

1.3.2　成本函数

定义 3　生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入（劳动力、设备、原材料等）的价格或费用总额称为**该产品的总成本**. 它由固定成本和可变成本两部分组成，是产量的函数. 平均每单位产品的成本称为**平均成本**.

设 C 为总成本，C_1 为固定成本，C_2 为可变成本，$\overline{C}$ 为平均成本，q 为产量，则总成本函数为

$$C(q)=C_1+C_2(q),$$

平均成本函数为

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{C_1}{q}+\frac{C_2(q)}{q}.$$

1.3.3 收益函数

定义 4 生产者出售一定量的产品所获得的全部收入，称为**总收益**. 它是产品的销售价格与销售数量的乘积. 出售一件商品所获得的收入，称为**平均收益**. 它是总收益与销售数量的比值.

设 p 为销售价格，q 为销售数量，R 为总收益，$\overline{R}$ 为平均收益，L 为总利润，则
总收益函数为

$$R(q)=pq,$$

总利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q),$$

平均收益函数为

$$\overline{R}(q)=\frac{pq}{q}=p.$$

1.3.4 均衡价格

定义 5 市场上需求量与供给量相等时的价格称为**均衡价格**，也就是需求函数与供给函数相等时的解，即

$$q_d=q_s$$

时的解 $p=p_0$，就是均衡价格，而 $q_0=q(p_0)$ 称为**均衡商品量**，也称为**市场均衡交易量**.

用 D 表示需求曲线，用 S 表示供给曲线，用 q_d，q_s 分别表示消费者希望购买的商品量与生产者愿意出售的商品量. 当 $p=p_1<p_0$ 时，$q_s<q_d$（见图 1-6），市场上出现“供不应求”的现象，商品短缺，可能会产生抢购现象；当 $p=p_2>p_0$ 时，情形相反，市场上出现“供过于求”的现象，商品滞销，库存增加.

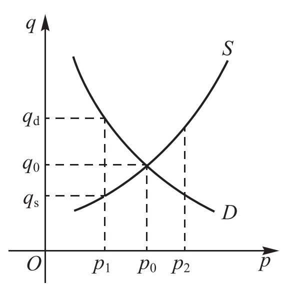


图 1-6

例 设某商品的需求函数和供给函数分别为 $q_d=2-3p$，$q_s=5p-2$，求市场均衡交易量和均衡价格（单位：百万元/千吨）.

解 由均衡条件 $q_d=q_s$，得

$$2-3p=5p-2,$$

解得

$$p=p_0=\frac{1}{2}.$$

又由 $q_0=q(p_0)$，得

$$q_0=2-3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

即该商品的均衡价格为$\frac{1}{2}$百万元/千吨，均衡交易量为$\frac{1}{2}$千吨.

习题 1-3

1.市场调查显示，当某商品的售价为 70 元时，其市场需求量为 3.1 万件；若该商品的售价降低 3 元，则市场需求量将增加 0.03 万件. 试求：

(1)该商品的线性需求函数；

(2)当该商品的售价为 75 元时，其市场需求量是多少？

2.当某商品的市场售价为每件 70 元时，生产厂商可向市场提供 4 万件该商品；当商品的价格每件增加 3 元时，生产厂商可多提供 0.96 万件该商品. 试求：

(1)该商品的线性供给函数；

(2)当该商品的市场售价为 75 元时，生产厂商的供应量是多少？

3.某产品生产的总成本函数为 $C(q)=900+20q+q^2$(千元)，求生产 200 个该产品的总成本和平均成本.

4. 某厂生产的游戏机每台可卖 110 元，固定成本为 7 500 元，可变成本为每台 60 元.

(1)要卖多少台游戏机，厂家才可保本(收回投资)?

(2)卖掉 100 台的话，厂家盈利或亏损了多少?

(3)要获得 1 250 元的利润，需要卖掉多少台?

5. 设某商品的需求函数和供给函数分别为 $q_d=\frac{5\ 600}{p}$ 和 $q_s=p-10$，请找出均衡价格，并求此时的供给量与需求量.

数学文化

函数思想是随着人们开始运用数学知识研究事物的运动变化情况而出现的. 纵观 300 年来函数概念的发展，众多数学家从几何、代数，直至对应、集合的角度不停赋予函数概念新的思想，进而推动了整个数学的发展.

微课：
函数概念的发展-0rdplk

16 世纪，由于生产实践和科学技术发展的需要，数学不仅要研究静止不动的量，而且要研究运动变化的量及它们之间的依赖关系. 1638 年，意大利数学家、科学家伽利略在《关于两门新科学的对话》一书中多处使用比例关系，并通过文字表述了变量关系，这实际上运用了函数思想；1673 年，法国数学家笛卡尔注意到一个变量对另一个变量的依赖关系，他引进了变量思想，指出所谓变量是指“不知的和未定的量”；1673 年，德国数学家莱布尼茨首次使用“function”表示“幂”，后来他用该词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等曲线上点的有关几何量；与此同时，英国物理学家牛顿在微积分的讨论中，使用“流量”表示变量间的关系.

18 世纪微积分的发展促进了函数概念“解析定义”的发展. 1718 年，瑞士数学家约翰·伯努利在莱布尼茨函数概念的基础上，对函数概念进行了明确的定义：“函数是由任一变量和常数的任一形式所构成的量.”1734 年，瑞士数学家欧拉用 $f(x)$ 表示函数. 1748 年，欧拉推广了函数定义：“一个变量的函数是由这个变量和一些数即常数以任何方式组成的解析表达式.”他把约翰·伯努利给出的函数定义称为解析函数，并进一步分为代数函数和超越函数. 此外，他还考虑了“表示随意地画出的曲线的函数”(随意函数). 1755 年，欧拉又把函数定义为：“如果某些变量以某一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随着变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数.”

1821 年，法国数学家柯西利用变量这个概念给出了函数的定义：“在某些变数间存在着一定的关系，当给定其中某一变数的值，其他变数的值也可以随之确定时，则将最初的变数叫作自变量，其他各变数叫作函数.”1822 年，法国数学家傅里叶发现某些函数可用曲线表示，也可用一个式子表示，或用多个式子表示. 1837 年，德国数学家狄利克雷拓广了函数概念，指出：“对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 总有完全确定的值与之对应，那么 y 叫作 x 的函数.”这就是经典函数定义.

当集合论在数学中占据重要地位后，美国数学家维布伦用“集合”和“对应”的观点给出了近代函数定义. 1914 年，德国数学家豪斯多夫用“序偶”来定义函数，避开了意义不明确的“变量”和“对应”概念，但引入了不明确的概念“序偶”. 波兰数学家库拉托夫斯基于 1921 年用集合概念来定义“序偶”，使得豪斯多夫的定义更加严谨. 用集合的语言重新叙述函数的定义，这就产生了函数的现代定义.

1859 年，我国清代著名数学家李善兰把“function”翻译成中文“函数”. 在中国古代，“函”字与“含”字通用，都有“包含”的意思. 古代用“天、地、人、物”四个字来表示四个不同的未知数或变量. 李善兰认为：“凡式中含天，为天之函数.”意思是，凡是公式中含有变量 x，则该式子叫作 x 的函数.“函数”一词一直沿用至今.

第 1 章 复习题

A 基础题

1. 选择题.

(1) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-3, & x>0,\\ 2, & x<0,\end{cases}$ 则 $f[f(1)-2]=$（　　）.

A. -3　　B. 2　　C. 0　　D. 1

(2) 函数 $f(x)=3x^3-\sin x$ 是（　　）.

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数 D. 既是奇函数又是偶函数

(3)下列函数中定义域为$[-1,1]$的是( ).

A. $y=e^{\sin x}$ B. $y=\ln(1-x^2)$

C. $y=\sqrt[3]{1-x^2}$ D. $y=\arcsin x$

(4)函数 $y=\arctan x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是( )

A. 偶函数 B. 周期函数 C. 无界函数 D. 有界函数

(5)下列各组函数中是相同函数的是( ).

A. $f(x)=x^2+3x-1, g(t)=t^2+3t-1$ B. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}, g(x)=x+2$

C. $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-1}, g(x)=x+2$ D. $f(x)=3, g(x)=|x|+|3-x|$

2. 填空题.

(1)设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,则 $f[f(x)]=$____________.

(2)函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$的定义域是____________.

(3)设 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$,则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$____________.

(4)函数 $y=u^2, u=\sin v, v=1+\ln x$ 所构成的复合函数是____________.

(5)某厂生产某种产品的总成本函数与总收益函数分别为 $C(q)=5q+200$ 和 $R(q)=10q-0.01q^2$,则总利润 L 与产量 q 的函数关系为____________.

3. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; (2)$y=\arcsin\dfrac{2-x}{3}$;

(3)$y=\sqrt{3-2x-x^2}$; (4)$y=\ln\ln x$.

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

(1) $y=\ln(3-x)$;

(2) $y=e^{2-x^2}$;

(3) $y=(1+x)^2$;

(4) $y=\sin^3(2x+7)$.

5. 已知某商品的需求函数和供给函数分别为 $q_d=28-2p$, $q_s=-20+10p$. 求该商品的均衡价格.

B 提高题

1. 选择题.

(1) 函数 $y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$ 的定义域是(　　).

A. $(1,5]$

B. $(1,5)$

C. $(0,5]$

D. $(1,+\infty)$

(2) 设 $\varphi(x)=2^x$, 则 $\varphi[\varphi(-1)]=$(　　).

A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. -1

(3) 设 $f(2x+1)=5x+3$, 则 $f(x)=$(　　).

A. $5x+1$

B. $\frac{5}{2}x+1$

C. $\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$

D. $5x+\frac{1}{2}$

(4)下列各组函数中,不能构成复合函数的是(　　).

A. $y=2^u, u=\sin x$　　B. $y=y\sqrt{u}, u=2x-x^2-2$

C. $y=\arctan u, u=x^2+1$　　D. $y=\frac{1}{\sqrt{u}}, u=e^x+1$

(5)设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,则下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $f[f(x)]$　　B. $g[f(x)]$

C. $f[g(x)]$　　D. $g[g(x)]$

2. 填空题.

(1)设 $y=f(x), x\in[1,3)$,则 $y=f(2x-1)$ 的定义域为__________.

(2)函数 $y=\ln\sin x^2$ 是由__________、__________、__________复合而成的.

(3)设 $f(1-2x)=\frac{1}{x^2}-1$,则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=$__________.

(4)某工厂生产某产品,每日最多生产100个单位.已知日固定成本为130元,生产一个单位产品的可变成本为6元,则该厂日总成本函数为__________,平均成本函数为__________.

3. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{x-2}+\frac{1}{x-3}+\ln(5-x)$;　　(2)$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}$;

(3)$y=\arcsin\ln x$;　　(4)$y=\ln(x^2-1)+\arcsin\frac{1}{x+1}$.

4. 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$,求 $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$.

5. 下列各对函数是否为相同函数？

(1) $f(x)=\sqrt{(x-3)^2}$，$g(x)=|x-3|$；　　(2) $f(x)=e^{\ln 3x}$，$g(x)=3x$；

(3) $f(x)=1$，$g(x)=\csc^2 x-\cot^2 x$；　　(4) $f(x)=x$，$g(x)=\ln e^x$.

6. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

(1) $y=(8x+5)^{-2}$；　　(2) $y=\ln(2+x)$；

(3) $y=\tan\sqrt[3]{x^2+2}$；　　(4) $y=\ln \sin^2(1-2x)$.

7. 已知某产品的成本函数为 $C(q)=2q^2-4q+81$，需求函数为 $q_d=32-p$（p 为价格），求该产品的利润函数.

数学应用

案例:有两家出版社正在竞争一部新作的版权. A 出版社支付给作者的稿酬为:前 3 000 册,支付 6%的版税;超过 3 000 册的部分,支付 8%的版税,另加每本 2 元的稿酬. B 出版社支付给作者的稿酬为:前 4 000 册,不支付版税;超过 4 000 册的部分,支付 10%的版税,另加每本 3 元的稿酬. 若该书的定价为 45 元/册,请问作者应该选择哪一家出版社?

解 设作者选择 A、B 两家出版社所得的稿酬(单位:元)分别为 y_1,y_2,若销售量为 q 册,则 A 出版社支付给作者的稿酬为

$$y_1=\begin{cases}6\%\times45q, & q\leqslant3\ 000,\\ 6\%\times45\times3\ 000+8\%\times45(q-3\ 000)+2(q-3\ 000), & q>3\ 000\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2.7q, & q\leqslant3\ 000,\\ 8\ 100+5.6q-16\ 800, & q>3\ 000;\end{cases}$$

B 出版社支付给作者的稿酬为

$$y_2=\begin{cases}0, & q\leqslant4\ 000,\\ 10\%\times45(q-4\ 000)+3(q-4\ 000), & q>4\ 000\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & q\leqslant4\ 000,\\ 7.5q-30\ 000, & q>4\ 000.\end{cases}$$

显然,当 $q\leqslant4\ 000$ 时,$y_1>y_2$;当 $q>4\ 000$ 时,令 $y_1=y_2$,得 $q\approx11\ 211$.

于是,得到以下结果:

(1)当销售量 $q<11\ 211$ 时,作者应该选择 A 出版社;

(2)当销售量 $q=11\ 211$ 时,作者选择 A、B 出版社皆可;

(3)当销售量 $q>11\ 211$ 时,作者应该选择 B 出版社.