内 容 简 介

本教材在保证科学性和系统性的基础上，注重概念、定理的阐述，减少论证过程，力求简洁、通俗，符合学生的学习心理，方便学生对高等数学的学习、理解和应用。全书主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用等。

本书可作为高职高专院校非数学专业的数学基础课程教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程/光峰主编. --北京：北京邮电大学出版社，2012.5(2023.7重印)
ISBN 978-7-5635-2980-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①光… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 067536 号

策划编辑：金颖杰　**责任编辑**：任肖琳　**封面设计**：新视点设计

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：三河市长城印刷有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：10.25
字　　数：200 千字
版　　次：2012 年 5 月第 1 版
印　　次：2023 年 7 月第 9 次印刷

ISBN 978-7-5635-2980-3　　定　价：30.00 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

服务电话：400-615-1233

前言

高等数学课程是培养学生计算、逻辑推理、抽象思维和空间想象以及应用知识能力必不可少的一门课程，是高职高专各专业的一门重要公共基础课程。本教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合高职高专院校在培养技术应用型人才方面的教学特点编写而成的。

在编写过程中，我们综合吸收了大量优质教材的特点，密切结合当前高职高专教学改革的实际，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，力求简洁、通俗，符合学生的学习心理，方便学生对高等数学的学习、理解和应用。本教材主要具有以下特点。

(1)注重各专业培养目标对数学基础知识的需求和学生可持续发展的需要。根据不同专业的需要与不同生源的情况选择与整合数学知识。恰当把握教学内容的深度与广度，适度保持数学自身的系统性与逻辑性，以适合于高等职业院校学生的实际数学水平。

(2)考虑学习对象的状况及特点，在讲述基本公式、概念和定理的过程中，注意其几何图形的直观阐述；用实例引入抽象概念的讲解；例题的讲解清晰明了，并总结了不同类型题目的解题思路；对学生容易出错的地方，给出了“注意”予以提醒。在理论阐述和习题编排中，有意识地培养学生的数学思维和数学修养。不过分追求复杂的计算和理论上的严密论证，加强与实际应用联系较多的基础知识、基本方法、基本技能的训练。

(3)在每章开始都用简短语言提出了本章知识点，使学生一开始就明确各章的学习内容和主要目标。书中的例题、习题的类型和数量配置合理。每节后配有练习题，每章后配有复习题 A 组(基础层次)和 B 组(提高层次)，以便学生及时检测学习效果和归纳学习内容。

另外，本教材中带有“*”的内容，读者可根据实际需要选学。

本教材由光峰副教授任主编，刘建宇、姚秋妹任副主编。具体编写分工如

下：第一章及附录由光峰编写，第二章由田宇编写，第三章由王家宇编写，第四章由刘建宇编写，第五章由姚秋妹编写。

由于编者水平有限，衷心地希望广大读者对书中的不足之处给予批评与指正。

编　者

目录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，是高等数学中最重要的概念之一；极限是高等数学中研究问题的基本方法，而函数的连续则是研究的条件. 本章在复习函数基本知识的基础上，着重介绍函数的极限和函数的连续性等基本概念、性质及运算法则.

第一节　函　　数

在自然界、社会经济现象及工程技术中都存在着许许多多不同的变量，并且它们之间存在着某种联系，这里研究的函数即是对这种量与量之间依存关系的描述.

一、函数的概念

引例 1　设圆的面积为 S，半径为 r，则这两个变量间的相互依存关系由公式

$$S = \pi r^2$$

确定.

分析　当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时，根据上述公式，变量 S 都有唯一确定的值和它对应.

引例 2　某厂每天最多生产某种产品 2 000 件，设备和管理费用等固定成本为 10 000 元，每生产一件产品，成本增加 50 元，则每天的生产成本 C 与日产量 x 之间的对应关系由下式

$$C = 10\ 000 + 50x$$

确定.

分析　当日产量 x 在集合 $\{0, 1, 2, \cdots, 2\ 000\}$ 内任取一值时，根据上式，成本 C 都有唯一确定的值和它对应.

以上两例表明，在一个问题中往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是直接或间接地相互联系又相互制约的. 它们之间这种相互依赖的关系刻画了客观世界中事物变化的内在规律，这种规律用数学进行描述就是函数关系.

定义 1　设 x, y 是两个变量，D 是给定的非空数集，如果变量 x 在 D 内任取一

个确定的数值时，变量 y 按照一定的法则 f 都有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量**(或**函数**)，数集 D 称为函数的**定义域**，f 称为函数的**对应法则**.

当 x 取确定数值 $x_0\in D$ 时，通过法则 f，函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记为

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**，记为 M，即 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

由函数的定义可以看出，定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素，也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

例 1 函数 $y=x+1$ 与函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是否表示同一函数?

解 否，它们表示两个不同的函数. 前者的定义域为$(-\infty,+\infty)$，后者的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 因为定义域不同，所以函数不同.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如引例 1 中，函数 $S=\pi r^2$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$；引例 2 中，函数 $C=10\ 000+50x$ 的定义域为 $D=\{0,1,2,\cdots,2\ 000\}$. 但在数学上作一般性研究时，对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数，规定：函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围. 一般考虑以下几个方面：

(1) 分式函数的分母不能为零；

(2) 偶次根式的被开方式必须大于等于零；

(3) 对数函数的真数必须大于零；

(4) 三角函数与反三角函数要符合其定义；

(5) 如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$； (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\ln(x+1)$.

解 (1) 由 $x^2-1\neq0$，得 $x\neq\pm1$，所以函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 因为 $\begin{cases}1-x>0,\\x+1>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<1,\\x>-1,\end{cases}$ 所以函数的定义域为$(-1,1)$.

在函数的定义中，对定义域 D 内的每一个 x 值，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对定义域 D 内的每一个 x 值，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=R^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-R,R]$，由方程 $x^2+y^2=R^2$ 可确定出对应的 y 值，当 $x=R$ 或 $-R$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-R,R)$ 内任一值时，对应的 y 有两个值. 所以这个方程确定了一个多值函数.

多值函数是单值函数的复杂表现，只要把单值函数研究透彻了，多值函数的问题就迎刃而解了. 所以本书主要讨论单值函数，今后如不加声明，函数均指单值函数.

二、函数的性质

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义（区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或其定义域的一部分），则函数一般具有下列几种特性.

1. 有界性

定义 2　如果存在正数 M，使对任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**，否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如，$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-1,1)$ 上无界，因为不存在正数 M，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 上的一切 x 都成立，如图 1-1 所示.

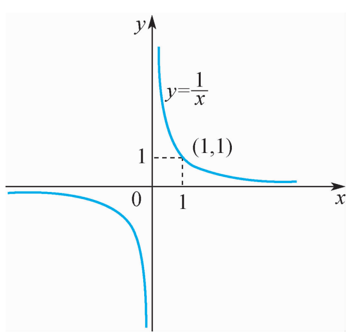


图 1-1

2. 单调性

定义 3　若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（或**单调减少**）. 区间 I 称为**单调增**

区间(或**单调减区间**);单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**;单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

例如,$y = x^2$ 在$[0, +\infty)$ 内单调增加,在$(-\infty, 0]$ 内单调减少.又如,$y = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

3. 奇偶性

定义 4 设区间 I 关于原点对称,若对任意的 $x \in I$,都有$f(-x) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**;若对任意的 $x \in I$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**;若函数既不是奇函数也不是偶函数,则称为**非奇非偶函数**.

例如,$y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数,$y = x^3$ 与 $y = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是奇函数,$y = x + 1 + \cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上是非奇非偶函数.

4. 周期性

定义 5 如果存在不为零的实数 T,使得对于任意的 $x \in I$,$x + T \in I$,都有$f(x+T) = f(x)$,则称函数 $y = f(x)$ 是**周期函数**,T 是 $y = f(x)$ 的一个**周期**.通常所说的周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例如,$y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数;$y = \tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

三、反函数

在研究两个变量之间的函数关系时,可根据问题的实际需要选定其中一个变量作为自变量,另一个变量为函数.

例如,在商品销售中,已知某种商品的价格为 $p(p > 0)$,设其销售量为 x,销售收入为 y.当已知销售量 x 时,根据关系式

$$y = px$$

可求得销售收入 y,这里 y 是 x 的函数;反之,若已知销售收入 y,求对应的销售量 x 时,根据 $y = px$ 可解得关系式

$$x = \frac{y}{p},$$

则给定 y 值,可求得对应的 x 值,这时 y 是自变量,x 是因变量,x 是 y 的函数,称 $x = \frac{y}{p}$ 为 $y = px$ 的反函数.

定义 6 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,值域为 M.如果对于 M 中的每个数 y,在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应,且使 $y = f(x)$ 成立,则确定了一个以 y 为自

变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中 x 与 y 互换位置，即记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 把直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-2 所示.

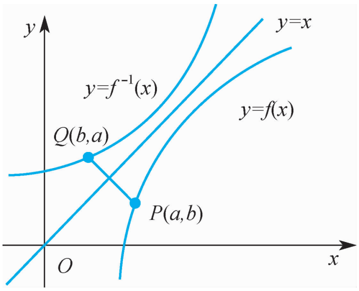


图 1-2

求反函数的一般步骤是：先由 $y=f(x)$ 解出 x，得 $x=\varphi(y)$，看它是否能成为函数；如果它是函数，再将函数 $x=\varphi(y)$ 中的 x,y 分别换为 y,x，即得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$.

例 3　求函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解　由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$. 当 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取一值时，有唯一确定的 x 值与之对应，所以它是一个函数. 将 x,y 分别换为 y,x，得

$$y=x^3-1,$$

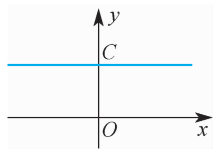
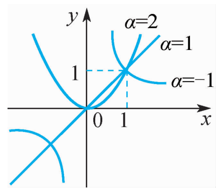
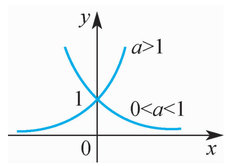
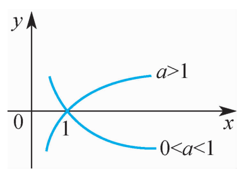
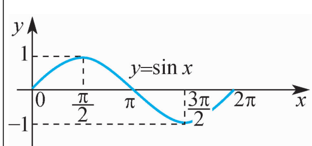
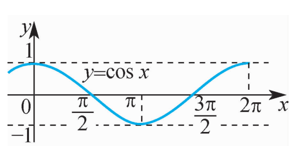
即函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

四、基本初等函数

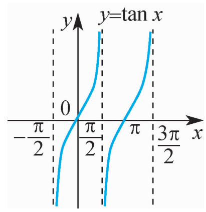
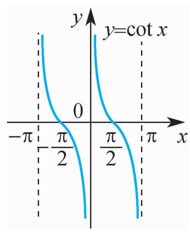
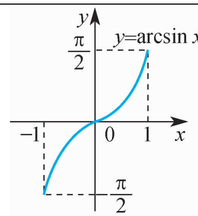
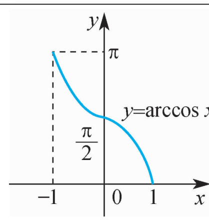
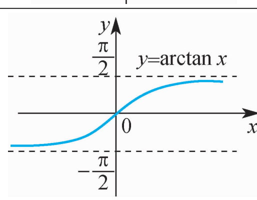
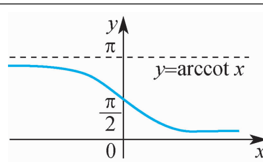
常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**. 为后面学习方便起见，现将这六类基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形、性质等列表表示出来（见表 1-1）.

随堂测试

表 1-1

函数	定义域和值域	图形	性质
常数函数 $y=C$ (C 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$		1. 有界; 2. 偶函数.
幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为实数)	定义域由 α 的取值决定		1. 图形均过点(1,1); 2. 在第一象限内,当 $\alpha>0$ 时,单调增加;当 $\alpha<0$ 时,单调减少.
指数函数 $y=a^{x}$ ($a>0$,且 $a\neq1$, a 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		1. 图形均过点(0,1); 2. 图形均在 x 轴上方; 3. 当 $0<a<1$ 时,单调减少,当 $a>1$ 时,单调增加.
对数函数 $y=\log_{a}x$ ($a>0$,且 $a\neq1$, a 为常数)	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		1. 图形均过点(1,0); 2. 图形在 y 轴右侧; 3. 当 $0<a<1$ 时,单调减少,当 $a>1$ 时,单调增加.
三角函数 正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		1. 图形均过原点; 2. 奇函数; 3. 有界; 4. 周期为 2π,在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加,在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$).
三角函数 余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		1. 偶函数; 2. 有界; 3. 周期为 2π,在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 内单调增加,在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$).

续表

	函　　数	定义域和值域	图　　形	性　　质
三角函数	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		1. 奇函数； 2. 无界； 3. 周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$.
三角函数	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		1. 奇函数； 2. 无界； 3. 周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$.
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		1. 图形过原点； 2. 奇函数； 3. 有界； 4. 单调增加.
反三角函数	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		1. 有界； 2. 单调减少.
反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		1. 图形过原点； 2. 奇函数； 3. 有界； 4. 单调增加.
反三角函数	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		1. 有界； 2. 单调减少.

五、复合函数

事物与事物的关系，通常是相互关联、错综复杂的. 例如，某水库的水位是因为时间的变化而改变的，而水库的蓄水量又是由水库的水位决定的. 因此，水库的蓄水量与时间之间也发生着联动关系. 这种相互连带关系抽象为数学的概念，就是复合函数.

定义 7 设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**.

例如，$y=u^2$，$u=\sin x$ 可复合成 $y=\sin^2 x$.

复合函数还可以有多个中间变量，如 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x+1$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$，这里 u，v 都是中间变量.

注意 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如，$y=\sqrt{1-u^2}$ 和 $u=x^2+2$ 就不能构成复合函数. 因为对函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 而言，必须要求变量 $u\in[-1,1]$，而 $u=x^2+2\geqslant 2$，所以对任何 x 的值，y 都得不到确定的对应值.

利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数，还可以把一个较复杂的函数分解成几个简单的函数，这对于今后掌握微积分的运算是很重要的.

例 4 将下列复合函数进行分解.

(1) $y=\ln\cos x$； (2) $y=\sqrt[3]{\sin x}$； (3) $y=3^{\arccos(3x+2)}$.

解 (1) $y=\ln\cos x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\cos x$ 复合而成的.

(2) $y=\sqrt[3]{\sin x}$ 是由 $y=\sqrt[3]{u}$，$u=\sin x$ 复合而成的.

(3) $y=3^{\arccos(3x+2)}$ 是由 $y=3^u$，$u=\arccos v$，$v=3x+2$ 复合而成的.

六、初等函数与分段函数

定义 8 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\ln\cos x$，$y=\dfrac{x(x+\sqrt{x^2+1})}{x-1}$，$y=\cos^2 x+2$ 等都是初等函数.

定义 9 在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数，称为**分段函数**.

分段函数仍旧是一个函数，而不是几个函数，分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

例如，符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x\leqslant 0,\\1-x, & 0<x\leqslant 1,\\1, & 1<x<3,\end{cases}$ 求 $f(0),f\left(\frac{1}{2}\right),f(2)$ 及函数的定义域.

解　$f(0)=2^0=1,f\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},f(2)=1$，函数的定义域为 $(-1,3)$.

分段函数一般不是初等函数，如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\-x, & x<0\end{cases}$ 不能用一个式子表示. 但少数例外，如绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\-x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数.

习题 1-1

1. 下列各组函数是否是相同的函数？

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；　(2) $y=|x|$ 与 $u=\sqrt{v^2}$；

(3) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；　(4) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{5}{x^2+2}$；　(2) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\ln(4-x)$；

(3) $y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\\sqrt{2-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x+1, & -1<x<0,\\0, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right),f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=3x^2-x^6$；　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-x^2}+x$；　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-3$；　(2) $y=\ln(x-1)+1$.

6. $f(x)=(x+1)^2,g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)],g[f(x)]$.

7. 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\cos 4x$；　　(2) $y=\ln(1+2x)$；

(3) $y=\sin^2(\sqrt{x}+1)$；　　(4) $y=\arctan(\ln x)$.

8. 王先生到郊外去观景，以 2 km/h 的速度匀速步行 1 h 后，他发现一骑车人的自行车坏了，便花了 1 h 帮人把车修好，随后加快速度，以 3 km/h 的速度匀速步行 1 h后到达终点，然后立即以匀速折返，耗时 2 h返回到出发点. 试求王先生离家的距离 y 与时间 x 之间的函数关系.

第二节　极　　限

图文
数学家刘徽

极限概念是高等数学的重要概念，极限方法是高等数学的基本方法. 所谓极限方法，就是通过考察变量的无限趋向，来解决初等数学所不能解决的问题. 高等数学中许多概念都是以极限为基础建立起来的，因此，本节内容十分重要.

一、数列的极限

引例 3　中国古代哲学家庄周在《庄子 · 天下篇》中引述惠施的话："一尺之锤，日取其半，万世不竭."

分析　这句话的意思是指一尺的木棒，第一天取它的一半，即$\frac{1}{2}$ 尺；第二天再取剩下的一半，即$\frac{1}{4}$ 尺；第三天再取第二天剩下的一半，即$\frac{1}{8}$ 尺；这样一天天地取下去，而木棒是永远也取不完的.

尽管木棒永远取不完，可到了一定的时候，还能看得见吗?看不见意味着什么?不就是快没了吗?终极的时候，就近乎没有了. 它的终极状态就趋于零.

事实上，假设木棒为一个单位长，用 x_n 表示第n 天截取之后所剩下的长度，可得

$$x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{4},x_3=\frac{1}{8},\cdots,x_n=\frac{1}{2^n},\cdots,$$

这样 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 构成一列有次序的数. 设想 n 无限增大(记为 $n\to\infty$)，在这个过程中，x_n 无限接近于一个确定的数值(零)，这个确定的数值(零) 在数学上称为上面这列有次序的数(所谓数列)$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

先说明数列的概念. 数列就是按照一定顺序排成的一列数，一般记为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，简记为$\{x_n\}$，其中 x_n 称为数列的**通项**.

例如，数列 $1,2,3,4,5,\cdots$ 的通项是 $x_n=n$，可以记为$\{n\}$；数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},$

$\frac{1}{5},\cdots$ 的通项是 $x_n=\frac{1}{n}$，可以记为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$；数列 $2,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots$ 的通项是 $x_n=2^n$，可以记为$\{2^n\}$.

数列$\{x_n\}$也可看成自变量为正整数 n 的函数：$x_n=f(n)$，其定义域是全体正整数. 当自变量 n 依次取 $1,2,3,\cdots$ 一切正整数时，对应的函数值就排列成数列$\{x_n\}$.

引例 3 蕴含了数列极限思想，现把数列极限的定义描述如下.

定义 10　对于数列$\{x_n\}$，若当 n 无限增大时，通项 x_n 无限接近于某个确定的常数 A，则常数 A 称为数列$\{x_n\}$的**极限**，此时也称数列$\{x_n\}$收敛于 A，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$. 若数列$\{x_n\}$的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$**发散**.

注意　数列极限是个动态概念，是变量无限运动渐进变化的过程，是一个变量(项数 n)无限运动的同时另一个变量(对应的通项 x_n)无限接近于某个确定常数的过程，这个常数(极限)是这个无限运动变化的最终趋势.

例 1　观察下列数列的极限.

(1) $\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$：$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$；

(2) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$：$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots$；

(3) $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$：$-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.

解　当 $n\to\infty$ 时，数列(1)的通项 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 越来越接近于常数 1；而数列(2)的通项 $x_n=\frac{1}{3^n}$ 越来越接近于常数 0；数列(3)的通项 $x_n=\{(-1)^n\}$ 在 -1 与 1 之间交替出现而不趋于任何确定的常数，所以

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

二、函数的极限

数列是一种特殊形式的函数，把数列的极限推广可得到函数的极限. 根据自变量的变化过程，分两种情况讨论.

1. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 11　设函数 $y=f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有定义，若当 $|x|$ 无限增大时，

相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，则 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty),$$

其中 $x\to\infty$ 表示 x 的绝对值无限增大.

若只当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数趋近于某一确定的常数 A，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

从图 1-1 中容易看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

不难证明，函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限与在 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时的极限有如下关系.

定理 1 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例 2 讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解 由反正切函数的图形知，

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

由定理 1 知，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

微课

$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

首先介绍邻域的概念.

设 $x_0,\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$，则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

点 x_0 称为这**邻域的中心**，δ 称为这**邻域的半径**（见图 1-3）.

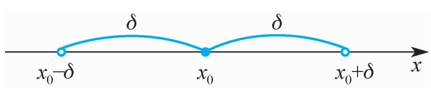


图 1-3

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

为了方便，有时把开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的**左 δ 邻域**，把开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的**右 δ 邻域**.

下面介绍当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

定义 12 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，当自变量 x 无限趋近于

x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0),$$

其中 $x\to x_0$ 表示 x 既可以从大于 x_0 的方向趋近于 x_0，也可以从小于 x_0 的方向趋近于 x_0.

注意　极限研究的是一种变化趋势，它要求 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，至于在 x_0 处的情况如何，有定义或无定义，对求 x_0 处的极限无任何影响. 如图 1-4 所示，当 $x\to 1$ 时，$f(x)=x+1$ 无限趋近于 2；如图 1-5 所示，当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 无限趋近于 2.

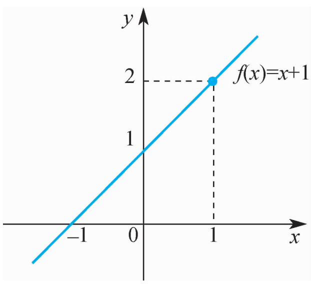


图 1-4

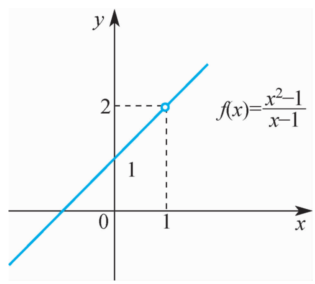


图 1-5

在讨论当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限问题中，对 $x\to x_0$ 的过程，若限制 $x<x_0$ 或 $x>x_0$，便引出了单侧极限的概念.

定义 13　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某左(或右)δ 邻域内有定义，当自变量 x 从 x_0 的左(或右)侧无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**左(或右)极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A(\text{或} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A).$$

显然，下面结论成立.

定理 2　极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例 3　设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1, \\ \dfrac{1}{2}, & x=1, \\ x-1, & x>1, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$，并讨论 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在.

解　由图 1-6 知，

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=2,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0,$$

由定理 2 知，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

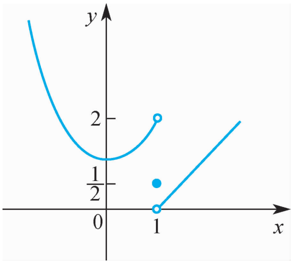


图 1-6

三、极限的性质

数列极限是函数极限的特殊情形，都可归结为在自变量的某一变化过程中，函数值无限接近于某一确定的常数，因而它们具有共同的性质. 下面以 $x\to x_0$ 的情形为例来叙述.

性质 1（唯一性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限值唯一.

性质 2（有界性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)$ 有界.

性质 3（保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则必存在 x_0 的某一去心邻域，使得在该邻域内，函数 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

四、无穷小与无穷大

微课
无穷小与无穷大

1. 无穷小的定义

定义 14 在自变量的某一变化过程中，以零为极限的变量称为该变化过程的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小. 又如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意 (1) 无穷小是个变量，常数中只有零是无穷小.

(2) 一个变量是无穷小必须指明变化过程，如当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 是无穷小，但当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 不是无穷小.

2. 无穷小的性质

性质 1　有限个无穷小的和也是无穷小.

例如,当 $x\to 0$ 时,x 与 $\sin x$ 都是无穷小,所以 $x+\sin x$ 也是无穷小.

无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小,如 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}=1$.

性质 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例如,当 $x\to\infty$ 时,$\frac{1}{x}$ 是无穷小,而 $|\sin x|\leqslant 1$,即 $\sin x$ 是有界函数,所以 $\frac{1}{x}\sin x$ 也是无穷小.

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

3. 无穷小与函数极限的关系

定理 3　函数 $\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$(其中 $\lim\alpha=0$).

注意　定理 3 中,下面没有标明自变量变化过程的记号"lim"是指自变量 x 的变化过程可以是 $x\to x_0^-$,$x\to x_0^+$,$x\to\infty$,$x\to-\infty$,$x\to+\infty$ 中的任何一种.

例如,$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=4$,则 $f(x)=4+\alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to 1}\alpha=0$. 又如,因为 $\frac{1+2x}{x}=\frac{1}{x}+2$,而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+2x}{x}=2$.

4. 无穷大的定义

定义 15　在自变量的某一变化过程中,绝对值无限增大的变量称为该变化过程的**无穷大量**,简称**无穷大**.

例如,因为 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$,所以 x^2 是当 $x\to\infty$ 时的无穷大;因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$,所以 $\ln x$ 是当 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

注意　无穷大不趋向于任何确定的常数,所以无穷大的极限不存在. 但为了叙述函数的这一性态,也说"函数的极限是无穷大",并记为 $\lim f(x)=\infty$.

5. 无穷小与无穷大的关系

定理 4　在自变量的同一变化过程中,

(1) 如果函数 $f(x)$ 是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷大;

(2) 如果函数 $f(x)$ 是无穷大,则 $\frac{1}{f(x)}$ 是无穷小.

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$；　　(2) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$；

(3) $x_n = \dfrac{3+2^n}{2^n}$；　　(4) $x_n = n + \dfrac{1}{n}$.

2. 利用函数的图形，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \tan x$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$；

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x$；　　(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccot} x$.

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geqslant 1, \\ 3x, & x < 1, \end{cases}$ 求极限 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$，并判定极限 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 是否存在.

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$ 讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} -ax, & x \geqslant 2, \\ x^2, & x < 2, \end{cases}$ 当 a 取何值时，$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 存在？

6. 指出下列各题中，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $y = \ln x$，当 $x \to 1$ 时；　　(2) $y = \cot x$，当 $x \to 0$ 时；

(3) $y = \mathrm{e}^{-x}$，当 $x \to +\infty$ 时；　　(4) $y = 2^x$，当 $x \to -\infty$ 时.

7. 利用无穷小的性质求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\tan \dfrac{1}{x} \cdot \arctan x\right)$.

第三节　极限的运算

微课
利用极限的四则运算求简单的极限

利用极限定义只能计算一些很简单的函数极限，而实际问题中的函数却要复杂得多. 本节介绍极限的四则运算法则、两个重要极限和无穷小的比较，这些都有助于极限运算.

一、函数极限的运算法则

定理 5（极限的四则运算法则）　设在自变量 x 的同一变化过程中，极限 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

注意 极限的四则运算法则要求参与运算的各个函数极限均存在，且法则(3)还必须满足分母的极限不为零；否则，不能直接使用法则.

法则(1)和法则(2)均可推广到有限个函数的情形，并有如下推论.

推论 1 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$（C 为常数).

推论 2 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$（$n$ 为正整数).

例 1 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x-8)$；(2) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)(3-x)$；(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-8}{8x+4}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x-8)=\lim\limits_{x\to 1}(3x^2)+\lim\limits_{x\to 1}(2x)-\lim\limits_{x\to 1}8=3\lim\limits_{x\to 1}x^2+2\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}8$

$$=3(\lim_{x\to 1}x)^2+2\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}8=3\times 1^2+2\times 1-8=-3.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)(3-x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)\cdot\lim\limits_{x\to 1}(3-x)=3\times 2=6$.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to 2}(8x+4)=20\neq 0$，所以$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-8}{8x+4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+x-8)}{\lim\limits_{x\to 2}(8x+4)}=\dfrac{3}{10}$.

例 2 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 由于$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$，故不能直接使用法则(3)求解. 在 $x\to 3$ 时，$x\neq 3$，故可约去公因子 $x-3$，得

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}$和$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1-x^2}$的极限均不存在(无穷大)，故不能直接使用极限的四则运算法则. 可先通分再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.

解 当 $x\to 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)$ 和$\lim\limits_{x\to 2}(\sqrt{x+2}-2)$的极限均为零，不能直接使用极限的四则运算法则. 此题可先对分母有理化，再求极限.

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4}$$

$$=\lim_{x\to2}(\sqrt{x+2}+2)=4.$$

例 5 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x-7}{2x^2+5}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+1}{x^3+3}$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+3}{3x^2-1}$.

解 (1) 当 $x\to\infty$ 时，分子、分母的极限均不存在(无穷大)，故不能直接使用极限的四则运算法则. 现将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^2，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x-7}{2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{x^2}}{2+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{1}{x}-\dfrac{7}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{5}{x^2}\right)}=\frac{5}{2}.$$

(2) 分子分母同除以 x 的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+1}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

(3) 分子分母同除以 x 的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+3}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}},$$

由于分子极限为 1，分母极限为 0，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+3}{3x^2-1}=\infty.$$

一般地，当 $a_0\neq0,b_0\neq0,m,n$ 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n>m \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } n<m \text{ 时}.\end{cases}$$

利用这个结论可以方便地求解有理分式当 $x\to\infty$ 时的极限.

微课

两个重要极限

二、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

列表考察当 $x\to0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的变化趋势，如表 1-2 所示.

表 1-2

x/rad	± 0.5	± 0.4	± 0.1	± 0.01	± 0.001	…
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.958 851 1	0.973 545 9	0.998 334 2	0.999 983 3	0.999 999 8	…

从表 1-2 看出，不管 $x \to 0^+$，还是 $x \to 0^-$，$\dfrac{\sin x}{x}$ 都无限趋近于常数 1，即

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

该极限的基本特征是：分子、分母的极限值均为零，且分母中的变量与分子正弦函数中的变量相同. 因此，该极限的一般形式为

$$\lim_{\square \to 0} \frac{\sin \square}{\square} = 1（\square \text{ 代表同一变量}）.$$

例 6　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$；　(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{x} = 5 \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{5x} = 5 \times 1 = 5.$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \dfrac{4x}{\sin 4x} \cdot \dfrac{3x}{4x} \right) = \dfrac{3}{4} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{\sin 4x} = \dfrac{3}{4}.$

例 7　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$；　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{x-1} \cdot \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x+1}$

$= -\dfrac{1}{2}.$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2} \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right)^2 = \dfrac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

列表考察当 $x \to \infty$ 时，函数 $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势，如表 1-3 所示.

表 1-3

x	…	$-1\ 000\ 000$	$-10\ 000$	-10	1	10	10 000	1 000 000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	…	2.718 28	2.718 42	2.867 97	2	2.593 74	2.718 15	2.718 28	…

从表 1-3 看出，当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 变化的大致趋势，可以证明，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的值无限趋近于一个确定的无理数 2.718 28…，把它记为 e，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

若令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，于是又可得

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

该极限的基本特征是：底数的极限值为 1，指数的极限是无穷大，且指数与底数中第二项互为倒数. 因此，该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}(\square\text{ 代表同一变量})$$

或

$$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}(\square\text{ 代表同一变量}).$$

例 8 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x}{3}}\right)^{\left(-\frac{x}{3}\right)\cdot(-3)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}=\mathrm{e}^{-3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=\mathrm{e}^2$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^x$.

解法 1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{1+x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{-1}=\mathrm{e}$.

解法 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}$.

三、无穷小的比较

由无穷小的性质知，有限个无穷小的和、积依然是无穷小，而两个无穷小的商不一定是无穷小. 例如，当 $x\to 0$ 时，$2x, x^2, \sin x$ 都是无穷小，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

以上不同的结果，反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度的不同. 为了比较两个无穷小的变化速度的快慢，下面引入无穷小阶的概念.

微课
无穷小量阶的比较

定义 16　设 α 与 β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小，则

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶**的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α **低阶**的无穷小；

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$，则称 β 与 α 是**同阶**无穷小，特别地，当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是**等价**无穷小，记为 $\alpha\sim\beta$.

例如，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x},\dfrac{3}{x},\dfrac{1}{x^2}$ 都是无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^2}$ 是比 $\dfrac{1}{x}$ 高阶的无穷小；由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}=3$，所以当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{3}{x}$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 是同阶无穷小.

等价无穷小对化简极限计算非常有用，常用的等价无穷小有：

当 $x\to 0$ 时，

$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$.

关于等价无穷小在求极限中的应用，有下面的定理.

定理 6　在自变量的同一变化过程中，α,α',β 和 β' 都是无穷小，且 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，如果 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，那么

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

据定理 6，在求分式函数的极限时，分子或分母的无穷小因式可用其等价无穷小代换，然后求极限. 这种方法可将某些复杂的极限化简.

例 10 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin 4x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\ln(1+3x)}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)\sin x}{\arcsin 2x}$.

解 (1) 因为当 $x\to 0$ 时, $\arctan x\sim x$, $\sin 4x\sim 4x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

(2) 因为当 $x\to 0$ 时, $\tan x\sim x$, $\ln(1+3x)\sim 3x$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)\sin x}{\arcsin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{2}=1.$

随堂测试

注意 相乘(除)的无穷小都可用各自的等价无穷小代换,但相加(减)的无穷小的项不能作等价代换,如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

习题 1-3

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+x^2-x-1)$; (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+x}{4x^2-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^4-x^2+2}{3+x^4}$; (8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x+2}{7x^5+3}$; (10) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x-1)^2(1-3x)^8}{(3x-1)^{10}}$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x(x+5)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}$; (6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x+1}$.

3. 利用等价无穷小代换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\tan x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}-1}{\sin^2 x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 3x}$.

4. 假定某种疾病流行 t 天后，感染的人数 N 由下式给出：

$$N=\frac{1\ 000\ 000}{1+5\ 000\mathrm{e}^{-0.1t}}.$$

如果不加控制，那么将有多少人感染上这种病？

第四节　函数的连续性

前面学习了极限. 现在，通过极限理论进一步考察函数的变化关系. 可以发现，在自然界中有许多现象，如植物的生长、气温的变化、河水的流动等都是连续变化的. 就植物的生长来看，当时间变化很微小时，植物的变化也是很微小的，这种现象在函数关系上的反映就是函数的连续性. 本节将用极限的方法讨论函数的连续性.

一、函数连续的概念

为了描述函数的连续性，先引入增量的概念.

定义 17　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量由 x_0 变到 x(x 仍在该邻域内) 时，称差 $x-x_0$ 为自变量在 x_0 处的**增量**，记为 Δx，即 $\Delta x=x-x_0$. 相应地，函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$，称差 $f(x)-f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**增量**，记为 Δy，即

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)\ \text{或}\ \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

注意　增量记号 Δx，Δy 是不可分割的整体，且增量可正、可负.

函数增量的几何意义如图 1-7 所示.

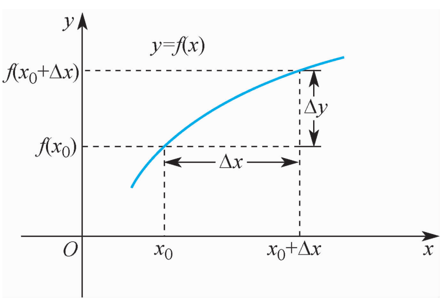


图 1-7

例 1　设函数 $y=f(x)=x^2$.

(1) 当 x 从 2 改变到 1 时，求自变量的增量与函数的增量；

(2) 当 x 从 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，求函数的增量.

解 (1) 自变量的增量 $\Delta x = 1-2=-1$，函数的增量

$$\Delta y = f(1)-f(2) = 1^2-2^2=-3.$$

(2) $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = (2x_0+\Delta x)\Delta x$.

从自变量的增量与函数的增量的关系出发，下面给出函数在某点处连续的定义.

定义 18 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若当自变量的增量 $\Delta x = x-x_0$ 趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**，x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

若令 $x_0+\Delta x = x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = 0,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$.

于是，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可叙述如下.

微课

函数在一点的连续性

定义 19 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

根据上述定义，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须同时满足以下三个条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义；

(2) 函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$.

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & x\neq 3,\\ 1, & x=3\end{cases}$ 在 $x=3$ 处是否连续.

解 首先，函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处有定义，且 $f(3)=1$. 其次，求极限

$$\lim_{x\to 3}f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = 1,$$

于是，$\lim\limits_{x\to 3}f(x) = f(3)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续.

由函数的左右极限的定义，相应地可以得到函数左连续及右连续的定义.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**. 显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是它在点 x_0 既左连续，又右连续.

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x<1,\\ x^2+1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

解　因为 $f(1)=2$，且

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+1)=2=f(1)\ ,\ \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}2x=2=f(1)\ ,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处左连续且右连续，从而 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**连续**，或称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 内的**连续函数**；若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上**连续**，此时也称 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的**连续函数**.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

二、函数的间断点

定义 20　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**间断**，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**间断点**.

由函数连续的定义知，满足下列条件之一的点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义；

(2) 函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

定义 21　设 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点. 如果左极限和右极限都存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**；否则，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

第一类间断点分为两类：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

例如，函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点. 因为若补充定义，令 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则函数在点 $x=0$ 处连续. 又如，$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x>0,\\ -x+1, & x\leqslant0\end{cases}$ 的跳跃间断点，因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(-x-1)=-1,\ \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(-x+1)=1,$$

从而，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在，如图 1-8 所示.

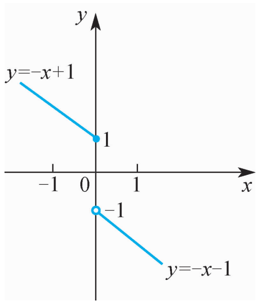


图 1-8

第二类间断点也分为两类：

（1）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**；

（2）若 $x \to x_0$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 震荡性地不存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的**震荡间断点**.

例如，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在点 $x = 0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$，所以 $x = 0$ 是函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点. 又如，函数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $x = 0$ 是 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点. 又因为当 $x \to 0$ 时，函数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 在 -1 到 1 之间作无限次震荡（见图 1-9），故 $x = 0$ 是 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 的震荡间断点.

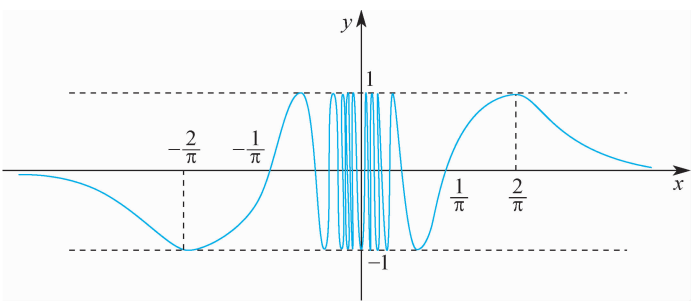


图 1-9

三、连续函数的运算与初等函数的连续性

由函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则，可得出下面的定理.

定理 7 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和（差）$f(x) \pm g(x)$、积 $f(x) \cdot g(x)$、商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$（$g(x_0) \neq 0$）在点 x_0 连续.

定理 8　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续．若复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也连续．

这表明在定理 8 的条件下，求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的极限时，极限符号和函数符号可以交换次序，即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(u_0).$$

根据上述定理及初等函数的定义，可得如下重要结论．

定理 9　初等函数在其定义区间(包含在定义域内的区间)上都是连续函数．

由定理 9 知，初等函数在其定义区间内某点处的极限等于该点处的函数值．

例 4　求下列极限．

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin 2x}{x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\ln\sin x$．

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin 2x}{x}}=\sqrt{2-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}}=\sqrt{2-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}}=\sqrt{2-2}=0.$

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\dfrac{\pi}{2}=\ln 1=0.$

四、闭区间上连续函数的性质

定义在闭区间上的连续函数，在理论和应用中有很多重要的性质．下面将对这些性质给予简单的介绍．

定义 22　对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0\in I$，使得对于任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\,(f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**(**最小值**)．

定理 10(最值定理)　闭区间上的连续函数在该区间上一定存在最大值和最小值．

推论(有界性定理)　闭区间上的连续函数在该区间上一定有界．

定理 11(介值定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$．

介值定理的几何意义是：对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个数 C，直线 $y=C$ 与连续曲线 $y=f(x)$ 至少有一个交点，如图 1-10 所示．

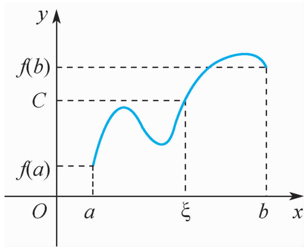


图 1-10

推论(零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

零点定理的几何意义是:若连续曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 的端点处的函数值异号,则曲线与 x 轴至少有一个交点,如图 1-11 所示.

随堂测试

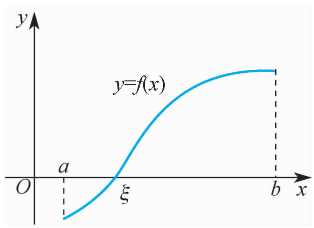


图 1-11

例 5 证明方程 $x-\sin x=1$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内有实根.

证 函数 $f(x)=x-\sin x-1$ 在闭区间 $[0,2\pi]$ 上连续,又 $f(0)=-1<0$, $f(2\pi)=2\pi-1>0$. 根据零点定理,在区间 $(0,2\pi)$ 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$. 因此,方程 $x-\sin x=1$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内至少有一个实根.

习题 1-4

1. 设函数 $y=x^3-x+2$,求适合下列条件的自变量的增量和相应的函数的增量.

(1) 当 x 由 2 改变到 3;　　(2) 当 x 由 2 改变到 1;

(3) 当 x 由 2 改变到 $2+\Delta x$.

2. 讨论下列分段函数在分段点处的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases}3\cos x, & x\geqslant 0,\\ 2+3x, & x<0;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ 2a+x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 试确定常数 a 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

4. 求下列函数的间断点并判定其类型.

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$；　　(2) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y=e^{\frac{1}{x}}$；　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{e^{2x}+x^2+3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin(1+x^3)}$；　　(4) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}$.

6. 证明方程 $x^3-3x-1=0$ 在 $(1,2)$ 内至少有一个实根.

复习题一

A　组

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\ln x$ 的定义域为________.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$ 的间断点是________.

3. 函数 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 的图形关于________对称.

4. 设 $f(x)=2x, g(x)=\lg x$，则 $f[g(x)]=$________，$g[f(x)]=$________.

5. 设 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$，则当 $x\to$________时，y 是无穷大；当 $x\to$________时，y 是无穷小.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

7. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $f(1)=$________.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2, & x\neq 2, \\ 0, & x=2, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$________.

二、选择题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\leqslant 1, \\ \sqrt{2x^2-1}, & x>1 \end{cases}$ 的定义域是(　　).

A. $[-1,1]$ B. $(-\infty,+\infty)$

C. $(-1,1)$ D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2. 设 $f(x)=|2x-3|$，则 $f[f(1)]=$（　　）.

A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

3. 设 $f(x)$ 是奇函数，且 $\varphi(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，则 $\varphi(x)$ 是（　　）.

A. 偶函数 B. 奇函数 C. 非奇非偶函数 D. 无定义

4. $x=0$ 是函数 $f(x)=\frac{\sqrt[x]{e}-1}{\sqrt[x]{e}+1}$ 的（　　）.

A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 无穷间断点

5. 当 $x\to 0$ 时，与 $x\sin x$ 等价的无穷小是（　　）.

A. $2x$ B. $2x^2$ C. x^2 D. x

6. 当 $x\to 0$ 时，下列变量中是无穷大的是（　　）.

A. $\cot x$ B. e^{-x}

C. $e^{\frac{1}{x}}$ D. $\sin\frac{1}{x}$

7. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在是 $f(x)$ 在 x_0 处连续的（　　）.

A. 充分条件且不是必要条件 B. 必要条件且不是充分条件

C. 充分必要条件 D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断，则（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在 B. $f(x_0)$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ D. 以上三种情况至少有一种发生

三、综合题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，并判定极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}\arctan x$； (2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{3-\sin 2x}$； (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$；

(7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x+1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$；　(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+e^x}{(x+2)\ln(1+x)}$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x<0, \\ a, & x=0, \\ \dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0. \end{cases}$

(1) 当 a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处极限存在？

(2) 当a,b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x<0, \\ 2x+b, & x\geqslant 0. \end{cases}$ 试确定 b 的值，使 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上成为连续函数.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ x, & x>0 \end{cases}$ 的连续性，如有间断点，指出其类型.

6. 证明方程 $e^x-2=x$ 至少有一个不超过 2 的正根.

B　组

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\tan x-\sin x)}{\sin x^4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{\sin^2 x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}+5}$.

2. 若$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^3+\dfrac{2x^2+1}{x+1}+2\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)$.

3. 已知极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b 的值.

4. 当 $x\to 0$ 时，无穷小 $1-\cos x$ 与 mx^n 等价，求 m,n 的值.