# 第八章

# 向量代数与空间解析几何

中学时曾学习过平面解析几何，它是由法国数学家笛卡尔和费马于17世纪开创的. 平面解析几何通过建立一个平面直角坐标系，将平面上的点与一个有序数组对应起来，从而将平面上的曲线或图形与代数方程对应起来，这样就可以用代数方法来研究几何问题. 而空间解析几何是平面解析几何从二维平面向三维空间的进一步拓展. 本章中首先介绍向量的概念及其线性运算，并由此建立空间坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的相关内容.

## 第一节　向量的线性运算与空间直角坐标系

### 一、向量的概念

在日常生活中，经常接触的量主要只有两类. 以天气预报为例，所得到的信息是"今天气温 10 ～ 20℃，西南风 2 ～ 3 级". 其中气温是由按适当的单位度量的数值所完全确定的，像这样只有大小，没有方向的量称为**数量**（也称**标量**），如温度、质量、体积、压强等；而关于风的信息则既包括风的速率，也包括风的方向，像这样既有大小，又有方向的量称为**向量**（也称**矢量**），如力、速度、位移、电场等.

在数学上，用有方向的线段来表示向量，其起点和终点表示向量的起点和终点，其长度表示向量的大小，方向表示向量的方向. 如图 8-1 所示，以 $A$ 为起点、$B$ 为终点的有向线段所表示的向量记为 $\overrightarrow{AB}$. 向量可用黑体字母表示，也可用字母上面加箭头表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$，$\vec{F}$.

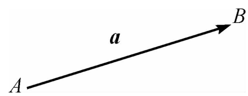



图 8-1

向量的大小称为向量的**模**,向量 $\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\boldsymbol{a}|$,$|\vec{a}|$,$|\overrightarrow{AB}|$. 其中,模为 1 的向量称为**单位向量**,模为零的向量称为**零向量**,记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点是重合的,所以其方向可看作是任意的. 不是零向量的向量就称为**非零向量**. 对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,若它们的方向相同或相反,则称这两个向量**平行**,记为 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 这里应该注意到,由于零向量的方向是任意的,所以可认为零向量与任何向量都平行.

当把实际问题抽象成数学问题时,对很多向量而言,其属性可完整地由大小与方向表示出来,而与其起终点的空间位置无关,如前面提到的风向,无论在哪个点观测,其强度和方向都是一样的. 像这样,与起点无关的向量,称为**自由向量**. 自由向量可以任意平行移动,移动后的向量仍然代表原来的向量. 由于在数学上着重研究自由向量,所以今后自由向量简称为向量,当研究的向量与起点有关时,将做特别说明.

在自由向量的概念下,只要两个向量大小相等,方向相同,就称两向量**相等**,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 从几何角度来讲,经过平移后能完全重合的向量就是相等的. 与之对应,大小相等但方向相反的向量称为**负向量**,记为 $-\boldsymbol{a}$. 显然,$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为负向量.

将一组平行向量的起点放在同一点,其终点与公共起点在同一条直线上,称其**共线**. 将一组向量(向量的个数大于等于 3) 的起点放在同一点,其所有终点和公共起点在同一个平面上,称其**共面**.

由向量平行定义可知,当两向量相等或互为负向量时,必平行,同时向量平行也可称向量共线.

## 二、向量线性运算的几何表达

为在向量之间建立联系,规定了向量的线性运算,包括向量间的加减法与数乘.

### 1. 向量的加减法

向量的加法与物理学中求合力的方法一样,其规则称为**平行四边形法则**:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,从公共起点到对角的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 8-2).

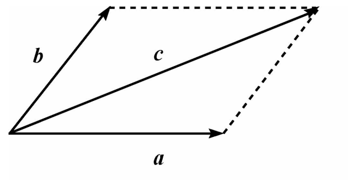



图 8-2

由上述法则容易验证，向量的加法符合下列运算规律：

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

在自由向量的意义下，平行四边形法则还可归纳为**三角形法则**：设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（见图 8-3）.

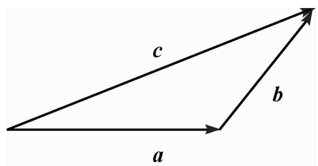



图 8-3

由于向量的加法满足交换律与结合律，所以无论它们的先后顺序如何，它们的和总是相同的，从而 $n$ 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可按任意顺序写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

再由向量相加的三角形法则，可得 $n$ 个向量相加的**多边形法则**：使前一向量的终点作为下一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 8-4 所示，有 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$.

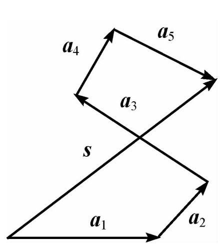



图 8-4

结合负向量的概念，可以将向量的减法变为加法运算. 差向量可以理解为把向

量 $-\boldsymbol{b}$ 加到向量 $\boldsymbol{a}$ 上,即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$(见图 8-5). 由此可以得到向量减法的运算规则:设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的起点重合,此时连结两向量终点且指向被减向量的有向线段就是差向量,记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(见图 8-6),特别地,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时,有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

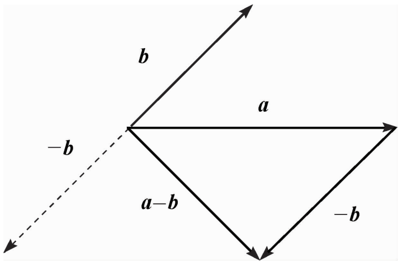



图 8-5

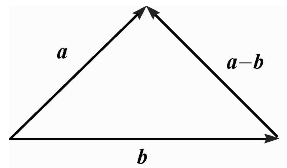



图 8-6

此外还要指出,由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

其中等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

**2. 向量与数的乘法**

已知物理公式 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t$,其中 $\boldsymbol{v}$ 表示速度,是向量;$t$ 表示时间,是数量;而 $\boldsymbol{s}$ 表示位移,是向量,是向量与数量之间的结合,这种结合称为**向量与数的乘法**,也称向量的**数乘**. 定义如下.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 $\lambda$ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{a}$,规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的.

当 $\lambda=1$ 时,有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;当 $\lambda=-1$ 时,有 $(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$,所得即前面所提到的负向量.

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) **结合律** $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) **第一分配律** $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

**第二分配律** $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量相加及数乘向量统称为向量的**线性运算**.

设 $\boldsymbol{a}\neq 0$,则向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,一般记为 $\boldsymbol{e}_a$,于是有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

**例 1** 设 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$,试求 $4\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

**解** $4\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=4(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})-3(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}-16\boldsymbol{b}+11\boldsymbol{c}$.

**例 2**　如果平面上一个四边形的对角线互相平分,试用向量证明这是平行四边形(见图 8-7).

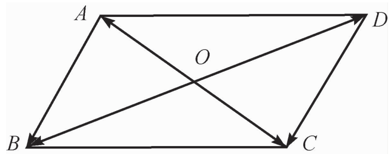



图 8-7

**证明**　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$,而$\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$,所以

$$\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB},$$

这说明四边形 $ABCD$ 的对边 $|AB|=|CD|$ 且 $AB\parallel CD$,从而四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

## 三、空间直角坐标系与向量的坐标分解

### 1. 数轴

初中阶段的代数学中,规定:给定一个点、一个方向及单位长度,就确定了一条数轴. 在向量的概念下,一个单位向量既确定了方向,又确定了单位长度,所以只需给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 例如,设点 $O$ 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了数轴 $Ou$(见图 8-8). 建立数轴的理论依据就是如下定理.


图 8-8

**定理**　设有非零向量 $\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 $\lambda$,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

**证明**　定理的充分性显然成立,下面证明定理的必要性.

由 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$,取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时取 $\lambda$ 正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 $\lambda$ 取负值,于是 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 $\lambda$ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\text{即}|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0,$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,故 $|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$. 因此条件的必要性得证.

如图8-8所示的数轴$Ou$上,任取一点$P$,对应一个向量$\overrightarrow{OP}$,由于$\overrightarrow{OP} \parallel \boldsymbol{e}$,由定理可知,必有唯一的实数$x$,使$\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e}$,并知向量$\overrightarrow{OP}$与实数$x$一一对应.于是

$$\text{数轴上点 } P \leftrightarrow \text{向量} \overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{e} \leftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而轴上的点$P$与实数$x$有一一对应的关系.据此,定义实数$x$为轴上一点$P$的坐标.

**2. 空间直角坐标系**

在空间任意取定一点$O$,并从点$O$引出三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,由此就确定了三条数轴,显然它们都以$O$为原点,且两两垂直.把这三条数轴依次记为$x$轴(横轴)、$y$轴(纵轴)、$z$轴(竖轴),并统称**坐标轴**,$O$称为**坐标原点**,它们构成一个空间直角坐标系,称为$Oxyz$坐标系或$[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系(见图8-9).通常还有如下规定:

(1) 三个数轴的长度单位相同.

(2) 把$x$轴和$y$轴配置在水平面上,而$z$轴取垂线,正向向上.

(3) 数轴的正向通常符合右手规则,即以右手握住$z$轴,当右手四指从$x$轴正向以$\frac{\pi}{2}$角度转向$y$轴正向时,大拇指的指向就是$z$轴的正向,如图8-10所示.

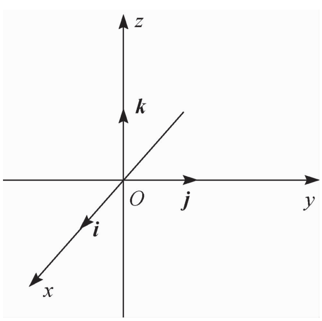



**图 8-9**

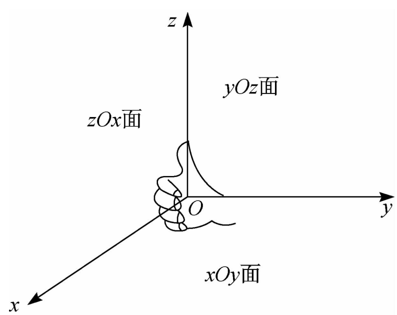



**图 8-10**

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面,这样定出的三个平面统称为**坐标面**.按照坐标面所包含的坐标轴,分别称为$xOy$面,$yOz$面及$zOx$面.三个坐标面将空间划分成八个区域,称为八个**卦限**.含有$x$轴、$y$轴与$z$轴正半轴的那个卦限称为第Ⅰ卦限,位于$xOy$面的上方.此外,在$xOy$面的上方,按逆时针方向排列着第Ⅱ卦限、第Ⅲ卦限和第Ⅳ卦限.在$xOy$面的下方,与第Ⅰ卦限对应的是第Ⅴ卦限,按逆时针方向还排列着第Ⅵ卦限、第Ⅶ卦限和第Ⅷ卦限,如图8-11所示.

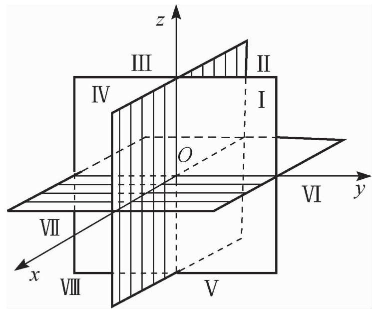



图 8-11

**3. 空间向量的坐标分解**

利用空间坐标系，可以定量地表现空间向量. 首先建立一个 $Oxyz$ 坐标系，则对任意给定的自由向量 $\boldsymbol{r}$，可以在坐标系中找到唯一的点 $M$，使$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，即$\overrightarrow{OM}$ 的方向和大小都与 $\boldsymbol{r}$ 相同. 以 $OM$ 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK$-$OPNQ$，如图 8-12 所示，由自由向量的特性与向量的加法运算，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

又由于$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ 都在坐标轴上，由本节定理知，它们都可以唯一地表示为$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，于是有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**坐标分解式**，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的**坐标分向量**. 有序数 $x,y,z$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$（在坐标系 $Oxyz$ 中）的**坐标**，记为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

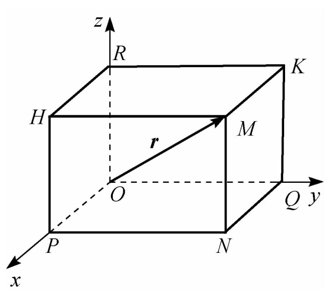



图 8-12

这里，向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 $M$ 关于原点 $O$ 的**向径**. 由上面的内容可知，一个点与该点的向径有相同的坐标，于是用坐标 $(x,y,z)$ 既表示点 $M$，又表示向量$\overrightarrow{OM}$. 于是，点 $M$、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序 $x,y,z$ 之间有一一对应的关系

$$M \leftrightarrow \boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \leftrightarrow (x, y, z).$$

**注**:由于点 $M$ 与向量$\overrightarrow{OM}$ 有相同的坐标,因此,求点 $M$ 的坐标,就是求$\overrightarrow{OM}$ 的坐标. 但同时,由于记号$(x,y,z)$既可表示点$M$,又可表示向量$\overrightarrow{OM}$,而几何中点与向量是两个不同的概念,因此在看到记号$(x,y,z)$时,须从上下文去认清它究竟表示点还是表示向量. 当$(x,y,z)$表示向量时,可对它进行运算;当$(x,y,z)$表示点时,就不能进行运算.

坐标面上和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征. 位于坐标面上的点必有一个坐标为 0,如点 $M$ 在 $yOz$ 面上,则 $x=0$,坐标形式为 $M(0,y,z)$;位于坐标轴上的点必有两个坐标为 0,如点 $M$ 在 $x$ 轴上,则 $y=z=0$,坐标形式为 $M(x,0,0)$.

在实际应用中,除了空间直角坐标系,为满足不同研究的需求,还引入了许多特殊类型的坐标系:角形坐标系,双极坐标系,抛物线坐标系,测地坐标系等. 结合不同的几何体,本章会陆续再介绍两类比较常用的空间坐标系:柱面坐标系和球面坐标系,但无论哪种坐标系都必须有三个有序数才能确定空间中一个点的位置.

## 四、向量线性运算的坐标表示

前面已经学习过向量的线性运算,但主要是应用几何方法. 现在,结合向量的坐标表示,可以重新定义向量的线性运算,将其转化为代数问题.

任取两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,设其坐标为 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,其坐标分解式为

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

于是可得向量的加减法与数乘的坐标表示式.

(1) 向量加法的坐标表示式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) + (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= (a_x+b_x)\boldsymbol{i} + (a_y+b_y)\boldsymbol{j} + (a_z+b_z)\boldsymbol{k} \\ &= (a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z).\end{aligned}$$

(2) 向量减法的坐标表示式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) - (b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) \\ &= (a_x-b_x)\boldsymbol{i} + (a_y-b_y)\boldsymbol{j} + (a_z-b_z)\boldsymbol{k} \\ &= (a_x-b_x, a_y-b_y, a_z-b_z).\end{aligned}$$

(3) 向量数乘的坐标表示式

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}) = \lambda a_x\boldsymbol{i} + \lambda a_y\boldsymbol{j} + \lambda a_z\boldsymbol{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

由此可见,对向量进行加、减及与数相乘,只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

事实上,本节定理还可表达为如下形式.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z),$$

其中 $(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$，相当于向量的对应坐标成比例，即

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

**例 3**　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 $AB$ 上求一点 $M$，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

**解**　如图 8-13 所示. 由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$，从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}).$$

以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标（即点 $A$、点 $B$ 的坐标）代入，得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 $M$ 的坐标.

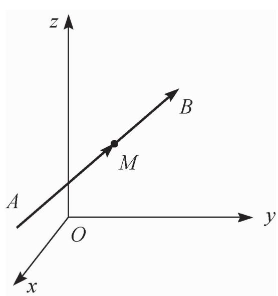



**图 8-13**

点 $M$ 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的**定比分点**. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，点 $M$ 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的**中点**，其坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

**例 4**　已知三角形 $ABC$ 的三个顶点分别为 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，$C(x_3,y_3,z_3)$，求重心的坐标.

**解**　如图 8-14 所示，设 $F,E,D$ 分别为 $AB,AC,BC$ 边的中点，则 $AD,BE,CF$ 的交点 $O$ 为重心.

因为 $F$ 是 $AB$ 的中点,所以 $F$ 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right),$$

又由重心定义可知

$$\frac{|CO|}{|OF|}=\frac{2}{1}=2,\text{即}\ \lambda=2,$$

因此,由例 3 中定比分点公式可得,三角形重心点 $O$ 的坐标为

$$\left(\frac{x_3+2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}}{1+2},\frac{y_3+2\cdot\frac{y_1+y_2}{2}}{1+2},\frac{z_3+2\cdot\frac{z_1+z_2}{2}}{1+2}\right),$$

即点 $O$ 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

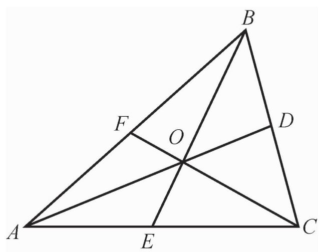



**图 8-14**

## 五、向量的模、方向余弦与投影

目前探讨的自由向量的特征只取决于它的大小和方向,这里考虑如何能够应用坐标形式定量地研究它们,并使其可以参与到运算当中.

**1. 向量模的坐标表示**

首先考虑向径,在空间中任取一点 $M(x,y,z)$,设 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,如图 8-12 所示,则可得分解式 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$,由勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2},$$

令 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,即

$$|\overrightarrow{OP}|=|x|,|\overrightarrow{OQ}|=|y|,|\overrightarrow{OR}|=|z|,$$

于是得向径模的坐标表示式

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

再考虑任意自由向量. 设点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,如图 8-15 所示,则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 有

$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$，这组坐标所示位置相当于将点$M_1$平移至坐标原点，其终点$M_2$所在的位置对应的坐标，即与$\overrightarrow{M_1M_2}$相等的向径$r$的坐标，由向径模的坐标表示式可得**向量模的坐标表示式**

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

这个表示式显然也可表示点$M_1$与点$M_2$间的距离，所以也称为空间中**两点间距离公式**.

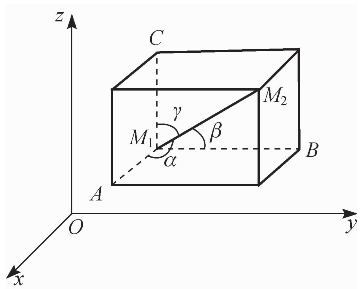



**图 8-15**

**例 5**　已知两点$A(2,1,5)$和$B(1,2,3)$，求与$\overrightarrow{AB}$方向相同的单位向量$\boldsymbol{e}$.

**解**　因为$\overrightarrow{AB}=(1,2,3)-(2,1,5)=(-1,1,-2)$，所以

$$\overrightarrow{AB}=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6},$$

于是

$$\boldsymbol{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-2).$$

**例 6**　在$yOz$面上，求与三点$A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,1)$等距离的点.

**解**　所求点在$yOz$面上，不妨设为$P(0,y,z)$，点$P$与三点$A,B,C$等距离. 因为

$$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2},$$
$$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2},$$
$$|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{0^2+(y-5)^2+(z-1)^2},$$
$$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|,$$

所以

$$\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}=\sqrt{0^2+(y-5)^2+(z-1)^2},$$

即

$$\begin{cases}3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4^2+(y+2)^2+(z+2)^2,\\3^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(y-5)^2+(z-1)^2,\end{cases}$$

解得$\begin{cases} y=1, \\ z=-2, \end{cases}$故所求点坐标为$(0,1,-2)$.

**2. 方向角与方向余弦**

为表达向量的方向,首先了解一下向量间的夹角.

将两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的起点平移至同一点,则两个向量之间的不超过$\pi$的夹角称为**向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角**,记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$,且$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})\in[0,\pi]$. 特别当向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$中至少有一个是零向量时,规定它们的夹角可取0与$\pi$之间的任意值.

由此可以进一步定义向量与坐标轴的夹角,即将非零向量起点平移至坐标原点后,与坐标轴正向所形成的夹角.

设非零向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{M_1M_2}$(即$|\boldsymbol{r}|\neq 0$)与三坐标轴正向的夹角分别为$\alpha,\beta,\gamma$,则称为向量$\boldsymbol{r}$的**方向角**,如图8-15所示. 由此可知,若设$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,则其坐标与方向角有如下关系

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma,$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$称为向量$\boldsymbol{r}$的**方向余弦**. 由向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{M_1M_2}$非零,即$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$,可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

从而可以看出$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r$,这表明以向量$\boldsymbol{r}$的方向余弦为坐标的向量就是与$\boldsymbol{r}$同向的单位向量$\boldsymbol{e}_r$,因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

这个表达式还表明,只要已知向量的两个方向角,第三个方向角也将被确定下来,但不唯一,请读者从几何的角度进一步理解这个问题.

**例7** 已知两点$A(2,2,\sqrt{2})$和$B(1,3,0)$,计算向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦和方向角以及与$\overrightarrow{AB}$同向的单位向量.

**解** 因为

$$\overrightarrow{AB}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2}),$$

所以$\overrightarrow{AB}$的模

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

$\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\overrightarrow{AB}$ 的方向角

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

设 $\boldsymbol{e}$ 为与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量，由于 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，即得 $\boldsymbol{e}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

**例 8**　设有向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $|\overrightarrow{P_1P_2}|=2$，它与 $x$ 轴和 $y$ 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{\pi}{3}$，如果 $P_1$ 的坐标为 $(1,0,3)$，求 $P_2$ 的坐标.

**解**　设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角为 $\alpha,\beta,\gamma$. 已知 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4}$，故 $\cos\alpha=\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$，于是

$$\overrightarrow{P_1P_2}=|\overrightarrow{P_1P_2}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=2\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=(1,\sqrt{2},\pm1).$$

设 $P_2$ 的坐标为 $(x,y,z)$，有 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x-1,y,z-3)$，故

$$(x-1,y,z-3)=(1,\sqrt{2},\pm1),$$

即 $(x,y,z)=(2,\sqrt{2},2)$ 或 $(2,\sqrt{2},4)$.

**3. 向量在轴上的投影**

向量在轴上的投影是一个数值，它集中反映了轴与向量的相对位置关系，与向量的大小与方向都关系密切. 设点 $O$ 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定 $u$ 轴(见图 8-16). 对任意给定向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}$，再过点 $M$ 作与 $u$ 轴垂直的平面交 $u$ 轴于点 $M'$，则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $u$ 轴上的分向量**. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 $\lambda$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $u$ 轴上的投影**，记为 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 $(\boldsymbol{a})_u$，其中点 $M'$ 称为**点 $M$ 在 $u$ 轴上的投影**.

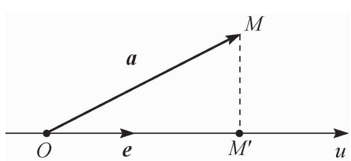



**图 8-16**

按此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 $a_x,a_y,a_z$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 在三条坐标轴上的投影，即

$$a_x = \mathrm{Prj}_x \boldsymbol{a}, a_y = \mathrm{Prj}_y \boldsymbol{a}, a_z = \mathrm{Prj}_z \boldsymbol{a}.$$

由此可知,向量的投影具有与坐标相同的性质.

(1) $\mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos\varphi$,其中$\varphi$为向量与$u$轴的夹角.

(2) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a} + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{b}$.

(3) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}$.

**例 9** 设正四面体的两条棱分别为$OA$和$AB$,且$|OA| = a$,求$\overrightarrow{OA}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{OA}$.

**解** 如图 8-17 所示,记$\angle OAB = \varphi$,有$\cos\varphi = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$,于是

$$\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\cos\varphi = \frac{a}{2}.$$

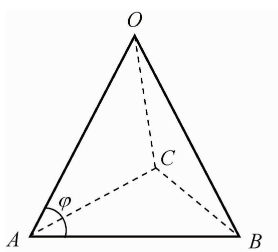



**图 8-17**

## 习题 8-1

1. 化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

2. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3,5)$,$\boldsymbol{b}=(-3,1,-4)$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$|\boldsymbol{a}|$,$8\boldsymbol{a}$.

3. 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\3\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b},\end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$,$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$,$\overrightarrow{MD}$,其中$M$是平行四边形对角线的交点.

5. 求点 $A(2,-3,-1)$ 关于 $xOy$ 面,$zOx$ 面及原点 $O$ 的对称点.

6. 求点 $M(4,-3,5)$与原点及各坐标轴、坐标面间的距离.

7. 设 $P$ 在 $x$ 轴上,它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 的距离的 2 倍,

求点 $P$ 的坐标.

8. 在 $z$ 轴上求一点 $M$,使点 $M$ 到点 $A(1,0,2)$ 和到点 $B(1,-3,1)$ 的距离相等.

9. 设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在各轴上的投影及在各轴上的分向量.

10. 设点 $A$ 位于第 Ⅴ 卦限,向径 $\overrightarrow{OA}$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$,且 $|\overrightarrow{OA}|=8$,求点 $A$ 的坐标.

11. 一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$,它在 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 $7$. 求这个向量的起点 $A$ 的坐标.

# 第二节　数量积　向量积　混合积

## 一、两向量的数量积

向量与向量的运算一定是向量吗?回顾一下高中物理学中常常涉及常力做功的问题. 设一质点在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从点 $M_1$ 移动到点 $M_2$,产生的位移 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 用 $\boldsymbol{s}$ 表示. 力 $\boldsymbol{F}$ 可以分解为在位移方向的投影 $\boldsymbol{F}_1$ 和垂直于位移方向的投影 $\boldsymbol{F}_2$ 两部分(见图 8-18),其中仅 $\boldsymbol{F}_1$ 对质点做功. 若记 $\theta$ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角,则 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}\cos\theta$,而力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}_1||\boldsymbol{s}|=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta,$$

显然,这里 $W$ 是个数量,但它的值由两个向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 运算所得. 类似的情况在其他问题中也常遇到,把这种向量运算形式抽取出来,即为两个向量的数量积.

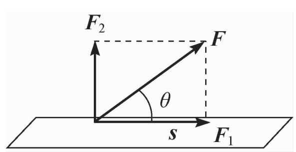



图 8-18

### 1. 数量积的定义及其运算性质

对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,它们的模 $|\boldsymbol{a}|$,$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角 $\theta$ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**(也称**点积**或**内积**),记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

由数量积定义容易得出如下运算性质:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$.

(2) 对于任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;反之,若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

**注**:当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中含有零向量时,由于零向量的方向可以看做是任意的,故可以认为零向量与任何向量都垂直,因此上述结论仍然成立.

(3) 两个非零向量的数量积等于其中一个向量的模与另一个向量在这向量的方向上的投影的乘积.

事实上,当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 即为向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影,于是可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{a}\boldsymbol{b}$. 同理,当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{b}\boldsymbol{a}$.

**2. 数量积的运算律**

(1) **交换律** $\quad\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) **分配律** $\quad(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

**证明** 因为当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时,上式显然成立;当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时,如图 8-19 所示,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{Prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\,(\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{Prj}_c\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

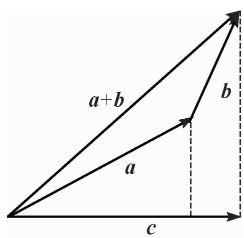



图 8-19

(3) 若 $\lambda,\mu$ 为实数,则

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$
$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

**例 1** 设 $|\boldsymbol{a}|=5,|\boldsymbol{b}|=2,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及向量 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 的模.

**解** $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=5\times2\times\cos\dfrac{\pi}{3}=5$,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{u}|^2&=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=5^2-4\times5+4\times2^2=21,\end{aligned}$$

所以 $|\boldsymbol{u}|=\sqrt{21}$.

**例 2**　设$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{7}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，若$(\boldsymbol{a}+\sqrt{m}\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\sqrt{m}\boldsymbol{b})$，试求 $m$ 的值.

**解**　因为$(\boldsymbol{a}+\sqrt{m}\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\sqrt{m}\boldsymbol{b})$，所以

$$(\boldsymbol{a}+\sqrt{m}\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\sqrt{m}\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-m|\boldsymbol{b}|^2=7-4m=0,$$

因此 $m=\dfrac{7}{4}$.

**例 3**　如图 8-20(a) 所示，设液体流过平面 $S$ 的一个区域，其面积为 $A$，液体匀速流动，流速为常向量 $\boldsymbol{v}$. 若设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 $S$ 的单位向量，试计算单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指方向的液体的质量，其中液体的密度为常值 $\rho$.

**解**　如图 8-20(b) 所示，单位时间内流过此区域的液体恰可形成一个斜柱体，其底面积为 $A$、斜高为$|\boldsymbol{v}|$.

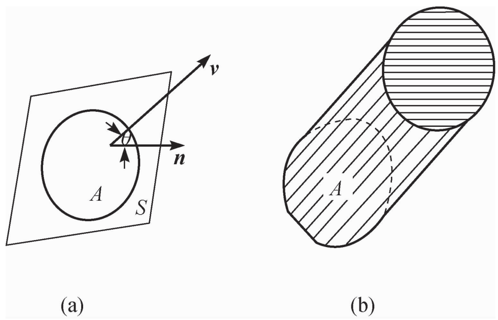



**图 8-20**

设 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为$\theta$，则此斜柱体的高为$|\boldsymbol{v}|\cos\theta$，故体积为$A|\boldsymbol{v}|\cos\theta=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$. 由此可得，单位时间内经过这区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指方向的液体的质量为

$$M=\rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

本书第十一章将涉及通量的概念，其流体的模型可按例 3 中的形式进行分析.

**3. 数量积的坐标表示式**

由于向量可以用坐标表示，所以向量的数量积也可用坐标来表示，若设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

事实上，上式可依据数量积的运算规律得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.\end{aligned}$$

由向量的数量积的坐标表示式,得

(1) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充要条件还可记为 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

(2) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta$ 满足的公式 $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ 可记为

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

这就是两向量夹角余弦的坐标表示式. 由于 $\cos\theta = \dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}\dfrac{b_x}{|\boldsymbol{b}|} + \dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}\dfrac{b_y}{|\boldsymbol{b}|} + \dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\dfrac{b_z}{|\boldsymbol{b}|}$,故两向量夹角余弦的坐标表示式也可整理成

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,$\alpha',\beta',\gamma'$ 为 $\boldsymbol{b}$ 的方向角.

**例 4** 设 $\boldsymbol{a} = (1,1,-4)$,$\boldsymbol{b} = (1,-2,2)$,求:(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$;(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta$;(3) $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影;(4) $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

**解** (1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-4) \times 2 = -9$.

(2) 因为

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = 3\sqrt{2},\ |\boldsymbol{b}| = \sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

所以

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{-9}{3\sqrt{2} \times 3} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

(3) 由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cdot \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$ 可得 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|} = \dfrac{-9}{3} = -3$.

(4) 由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$ 可得 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|} = \dfrac{-9}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

**例 5** 一质点在力 $\boldsymbol{F} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 的作用下,从 $A$ 点 $(2,1,0)$ 移动到点 $B(5,-2,6)$,求 $\boldsymbol{F}$ 所做的功及 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 间的夹角.

**解** $\boldsymbol{F}$ 所做的功是 $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$,其中 $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{AB} = 3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ 是位移向量,故

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = (4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \cdot (3\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}) = 18.$$

设 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 $\theta$,因为

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|} = \frac{18}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{1}{2},$$

所以,$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

## 二、两向量的向量积

在学习向量积前，不妨先回顾一下力学中学习过的力矩. 设有杠杆 $L$，则作用在点 $P$ 处的力 $\boldsymbol{F}$ 关于支点 $O$ 的力矩为一向量，若设此向量为 $\boldsymbol{M}$，它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overrightarrow{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

其中 $\theta$ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角(见图 8-21). 而力矩 $\boldsymbol{M}$ 的方向(按右手规则确定)垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 所确定的平面. 将计算力矩这种向量的运算形式抽象出来即为两向量的向量积.

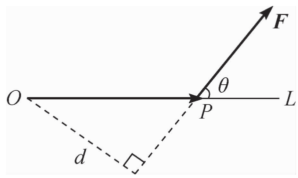



图 8-21

### 1. 向量积的定义及其运算性质

设向量 $\boldsymbol{c}$ 由向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 决定，其中

(1) 向量 $\boldsymbol{c}$ 的模为 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，$\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

(2) 向量 $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 符合右手规则，即四指从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$，拇指指向的方向即为 $\boldsymbol{c}$ 的方向(见图 8-22).

那么，向量 $\boldsymbol{c}$ 就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**向量积**(也称**叉积**或**外积**)，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

根据向量积的定义，还可以从几何的角度来理解向量积：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，向量积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 恰好为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所构成的平行四边形面积(见图 8-23). 向量积的物理解释则可以理解为力矩，因此，上面的力矩 $\boldsymbol{M}$ 等于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 的向量积，即 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

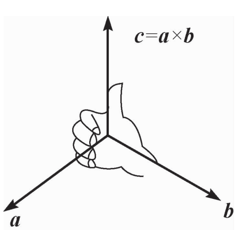



图 8-22

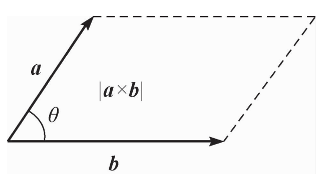



图 8-23

由向量积定义容易得出如下运算性质:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(2) 对于两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,则 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;反之,若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

**注**:若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中含有零向量,由于零向量的方向可看作是任意的,故可视为与任何向量都平行,因此上述结论仍然成立.

**2. 向量积的运算律**

(1) **反交换律**　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.

由于向量积运算服从右手规则,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$,而 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 为从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$,指向刚好与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 相反.

(2) **分配律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

(3) **结合律**　设 $\lambda$ 为常数,$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

**3. 向量积的坐标表示式**

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,按上述运算律,得向量积的坐标表示式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+\\&\quad a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

利用三阶行列式的表达方法,上式还可写成如下形式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

**例 6**　求与向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

**解**　由向量积的定义知,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是垂直的,而

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\3&-2&4\\1&1&-2\end{vmatrix}=10\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},$$

又

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

所以

$$e=\pm\frac{a\times b}{|a\times b|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}j+\frac{1}{\sqrt{5}}k\right).$$

**例 7**　求以 $A(3,0,2),B(5,3,1),C(0,-1,3)$ 三点为顶点的三角形面积.

**解**　由向量积的定义知,三角形 $ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

由于$\overrightarrow{AB}=(2,3,-1),\overrightarrow{AC}=(-3,-1,1)$,因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2i+j+7k,$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\mid 2i+j+7k\mid=\frac{1}{2}\times\sqrt{2^2+1^2+7^2}=\frac{3}{2}\sqrt{6}.$$

## 三、向量的混合积

### 1. 混合积的定义

混合积是研究三个向量的乘积,其中既包含向量积也包含数量积. 如果先作两个向量 $a,b$ 的数量积,再与第三个向量 $c$ 相乘,这相当于对向量 $c$ 作数乘,这种情况不必再讨论.

设有三个向量 $a,b$ 和 $c$,先作两向量 $a$ 和 $b$ 的向量积 $a\times b$,再将所得向量与第三个向量 $c$ 作数量积 $(a\times b)\cdot c$,这样得到的数量称为三向量 $a,b,c$ 的**混合积**(或**数量三重积**),记为$[abc]$.

由混合积的定义可得$[abc]=(a\times b)\cdot c=|a\times b||c|\cos\alpha$($\alpha$ 为 $a\times b$ 与 $c$ 的夹角). 当向量 $a,b,c$ 组成右手系(即 $c$ 的指向按右手规则由 $a$ 转向 $b$ 来确定)时,$\alpha$ 为锐角,$[abc]$的符号为正;如果 $a,b,c$ 组成左手系(即 $c$ 的指向按左手规则由 $a$ 转向 $b$ 来确定),$\alpha$ 为钝角,$[abc]$的符号为负.

### 2. 向量混合积的几何意义

设向量 $a,b$ 和 $c$ 为非零向量,则它们的混合积的绝对值$|[abc]|$恰好表示以向量 $a,b,c$ 为棱的平行六面体的体积.

事实上,将 $a,b$ 和 $c$ 移至共同的起点,以它们为棱可作一个平行六面体,如图 8-24 所示. 设$\overrightarrow{OA}=a,\overrightarrow{OB}=b,\overrightarrow{OC}=c,a\times b=f$. 由向量积定义可知,$|a\times b|$等于以向量 $a$ 和 $b$ 为边所作平行四边形 $OADB$ 的面积,即平行六面体的底面积 $S=$

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$;平行六面体的高 $h$ 恰为向量 $\boldsymbol{c}$ 在向量 $\boldsymbol{f}$ 上投影的绝对值,若设 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 夹角为 $\alpha$,则 $h=|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{c}||\cos\alpha|$. 由此可得,平行六面体的体积

$$V=Sh=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos\alpha|=|[\boldsymbol{abc}]|.$$

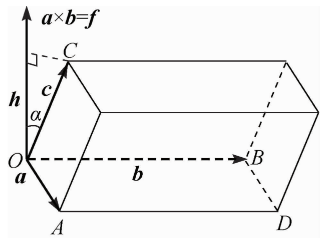



图 8-24

**注**:由于不明确向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成左手系还是右手系,所以 $h$ 要取 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{f}}\boldsymbol{c}$ 的绝对值.

**3. 混合积的坐标表示式**

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$. 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k},$$

再按两向量的数量积的坐标表示式,便得三向量的混合积的坐标表示式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

由混合积的几何意义可知,若混合积 $[\boldsymbol{abc}]\neq 0$,则能以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量为棱构成平行六面体,从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量不共面;反之,若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量不共面,则必能以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱构成平行六面体,从而 $[\boldsymbol{abc}]\neq 0$. 从而有下述结论:

三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们的混合积 $[\boldsymbol{abc}]=0$,即

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0.$$

**例 8** 已知四面体的四个顶点 $A(-1,0,4)$,$B(3,-2,7)$,$C(0,2,-5)$,$D(2,8,3)$,求该四面体的体积.

**解** 四面体的体积等于以向量

$$\overrightarrow{AB}=(4,-2,3),\overrightarrow{AC}=(1,2,-9),\overrightarrow{AD}=(3,8,-1)$$

为棱的平行六面体的体积的 $\frac{1}{6}$. 由混合积的几何意义知,平行六面体的体积

$$V=\left|[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]\right|=\left|\begin{vmatrix}4&-2&3\\1&2&-9\\3&8&-1\end{vmatrix}\right|=338,$$

故四面体的体积

$$V'=\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}\times 338=\frac{169}{3}.$$

## 习题 8-2

1. 已知三点 $M(1,2,3)$，$A(2,3,3)$，$B(1,2,4)$，求 $\angle AMB$.

2. 求向量 $\boldsymbol{a}=(4,-3,4)$ 在向量 $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$ 上的投影.

3. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

4. 设 $\boldsymbol{a}=(3,5,-2)$，$\boldsymbol{b}=(2,1,4)$，问 $\lambda$ 与 $\mu$ 有怎样的关系，能使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 与 $z$ 轴垂直？

5. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

6. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

(1) $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　　(2) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦.

7. 已知四点 $A(1,2,3)$，$B(5,-1,7)$，$C(1,1,1)$，$D(3,3,2)$，求：

(1) $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$；　　(2) 与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CD}$ 同时垂直的单位向量.

8. 向量 $\boldsymbol{d}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,-1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，且与 $\boldsymbol{c}=(2,-1,1)$ 的数量积为 $-6$，求向量 $\boldsymbol{d}$.

9. 向量 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 分别垂直于向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

10. 在顶点为 $A(1,-1,2)$，$B(5,-6,2)$ 和 $C(1,3,-1)$ 的三角形中，求 $AC$ 边上的高 $BD$.

11. 设 $[\boldsymbol{abc}]=2$，试求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

12. 已知 $A(1,2,0)$，$B(2,3,1)$，$C(4,2,2)$，$M(x,y,z)$ 四点共面，求点 $M$ 的坐标 $x,y,z$ 所满足的坐标关系式.

# 第三节　平面及其方程

平面是空间曲面中最简单，也是最重要的一种. 本节及下节将以向量为工具来讨论最简单的曲面和曲线，即平面和直线及其方程.

## 一、平面方程

### 1. 平面的点法式方程

由立体几何的知识知,过空间一点有且仅有一个平面与已知直线相垂直. 据此,当已知一点$M_0$和一个非零向量$\boldsymbol{n}$时,可以唯一地确定一个平面$\pi$,使之过点$M_0$且与向量$\boldsymbol{n}$垂直. 这里的向量$\boldsymbol{n}$称为平面的法向量,其定义如下.

任意垂直于一平面的非零向量,称为该**平面的法线向量**,简称**法向量**. 显然平面上的任一向量均与该平面的法向量垂直.

当已知平面$\pi$上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$和其法向量$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$时,下面建立平面$\pi$的方程(见图 8-25).

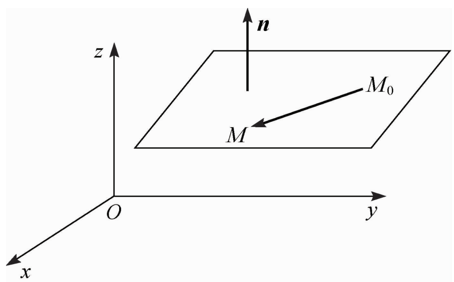



**图 8-25**

首先,设$M(x,y,z)$是平面$\pi$上的任一点,则

$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0),$$

且向量$\overrightarrow{M_0M}$必与法向量$\boldsymbol{n}$垂直,因此它们的数量积等于零,即

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0,$$

由数量积的坐标表示式可得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

这就是平面$\pi$上任一点$M(x,y,z)$所满足的方程.

反之,不在平面$\pi$上的点必不满足此方程. 假定$M_1=(x_1,y_1,z_1)$不在平面$\pi$上,若满足上述方程,必有$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M_1}$. 取平面$\pi$上的任一不同于$M_0$的点$M_2=(x_2,y_2,z_2)$,必有$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M_2}$,从而必有一平面$\pi_1$过$M_0$,$M_1$和$M_2$三点,且$\boldsymbol{n}\perp\pi_1$. 由$\pi_1$过点$M_1$,故$\pi_1$必不同于$\pi$,即过点$M_0$有两个平面与向量$\boldsymbol{n}$垂直,不成立.

由此可知,$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$就是平面$\pi$的方程,而平面$\pi$即是此方程的图形. 由于此方程是由平面$\pi$上的一点$M_0$及它的一个法向量$\boldsymbol{n}$确定,所以称此方程为**平面的点法式方程**.

**例 1**　求过点 $(1,1,-2)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(1,-2,5)$ 为法向量的平面的方程.

**解**　根据平面的点法式方程,得所求平面的方程为

$$(x-1)-2(y-1)+5(z+2)=0,$$

即 $x-2y+5z+11=0$.

**例 2**　一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$,试求该平面的方程.

**解**　因所求平面平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,故该平面的法向量为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,-3),$$

从而所求平面的方程为

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)-3\cdot(z+1)=0,$$

即 $x+y-3z-4=0$.

**2. 平面的一般方程**

将平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 进行整理,可得

$$Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0,$$

令 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$,则点法式方程可写为一个关于 $x,y,z$ 的三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad ①$$

反之,对任意三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$,任取一个满足此方程的数组 $(x_0,y_0,z_0)$,即有 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$,将这两个等式相减,可得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

这恰为过点 $(x_0,y_0,z_0)$ 且以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面方程.

综上所述,平面方程为一个三元一次方程,而任意三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的图形总是一个平面. 因此,把三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为**平面的一般方程**,其法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

包含 0 系数的三元一次方程表示特殊的平面,下面讨论它们关于坐标轴的相对位置,以及这样的平面通过的特殊点或线:

(1) 当 $D=0$ 时,方程 ① 成为 $Ax+By+Cz=0$,它表示一个过原点的平面.

(2) 当 $A=0$ 时,方程 ① 成为 $By+Cz+D=0$,其法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 $x$ 轴,它表示一个平行于 $x$ 轴的平面;当 $B=0$ 时,方程 ① 成为 $Ax+Cz+D=0$,其法向量 $\boldsymbol{n}=(A,0,C)$ 垂直于 $y$ 轴,它表示一个平行于 $y$ 轴的平面;当 $C=0$ 时,方程

① 成为 $Ax+By+D=0$,其法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,0)$垂直于 $z$ 轴,它表示一个平行于 $z$ 轴的平面.

(3) 当 $A=B=0$ 时,方程 ① 成为 $Cz+D=0$,其法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,C)$同时垂直于 $x$ 轴和 $y$ 轴,它表示一个平行于 $xOy$ 面的平面;当 $B=C=0$ 时,方程 ① 成为 $Ax+D=0$,其法向量 $\boldsymbol{n}=(A,0,0)$同时垂直于 $y$ 轴和 $z$ 轴,它表示一个平面平行于 $yOz$ 面的平面;当 $A=C=0$ 时,方程 ① 成为 $By+D=0$,其法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,0)$同时垂直于 $x$ 轴和 $z$ 轴,它表示一个平行于 $zOx$ 面的平面.

**例 3** 求过 $x$ 轴和点$(4,-3,-1)$的平面方程.

**解** 因为所求平面过 $x$ 轴,所以可设这平面的方程为

$$By+Cz=0.$$

又因这平面过点$(4,-3,-1)$,因此有关系式

$$-3B-C=0 \text{ 或 } C=-3B,$$

将其代入所设方程中并除以 $B$,得所求平面方程为 $y-3z=0$.

**3. 平面的截距式方程**

若平面与 $x,y,z$ 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$,$Q(0,b,0)$,$R(0,0,c)$,则 $a,b,c$ 依次称为平面在 $x,y,z$ 轴上的**截距**. 当其中 $abc\neq 0$ 时,可以由这三点坐标直接得到平面的方程.

为确定平面的方程,可先设所求平面的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 因为点 $P(a,0,0)$,$Q(0,b,0)$,$R(0,0,c)$都在这平面上,所以点 $P,Q,R$ 的坐标都满足所设方程,即

$$\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$$

由此得 $A=-\dfrac{D}{a},B=-\dfrac{D}{b},C=-\dfrac{D}{c}$,将其代入所设方程,可得

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0.$$

由于平面显然不过坐标原点,即 $D\neq 0$,于是方程两侧同时除以 $D$,得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

此方程就称为平面的**截距式方程**.

**例 4** 写出平面 $3x-4y+z-5=0$ 的截距式方程.

**解** 设 $y=z=0$,由方程得

$$3x-5=0, \text{即 } x=\frac{5}{3},$$

从而平面在 $x$ 轴上的截距为 $a=\frac{5}{3}$.

同理可得，平面在 $y$ 轴上的截距为 $b=-\frac{5}{4}$；平面在 $z$ 轴上的截距为 $c=5$. 因此，平面的截距式方程为

$$\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1.$$

**4. 平面的三点式方程**

已知不共线的三点确定一个平面，下面由已知不在同一直线上的三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，$M_3(x_3,y_3,z_3)$ 来确定平面方程.

设 $M(x,y,z)$ 是平面上的任一点，则三向量 $\overrightarrow{M_1M}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_1M_3}$ 共面，由向量共面的条件知

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

这就是所求平面的方程，该方程称为**平面的三点式方程**.

**例 5**　求过三点 $(2,3,0)$，$(-2,-3,-4)$，$(0,6,0)$ 的平面方程.

**解**　由平面的三点式方程，得

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-0 \\ -2-2 & -3-3 & -4-0 \\ 0-2 & 6-3 & 0-0 \end{vmatrix}=0,$$

即所求平面方程为 $3x+2y-6z-12=0$.

## 二、两平面的位置关系

设有两平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，下面探讨两平面的位置关系.

两平面的位置关系只有两种，平行（包括重合）或相交（包括正交，即垂直），相交就有夹角问题，把两平面的法线向量的夹角 $\theta$ 称为**两平面的夹角**，由于法线有两个方向，这里约定 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，其中两平面平行时 $\theta=0$，两平面垂直时 $\theta=\frac{\pi}{2}$，其余情况下两平面的夹角为锐角.

平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，那么 $(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 和 $(\widehat{-\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})=\pi-(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})$ 之一必属于 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，取其为平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的夹角 $\theta$(见图 8-26)，于是 $\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|$. 由两向量夹角余弦的坐标表示式，可得

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad ②$$

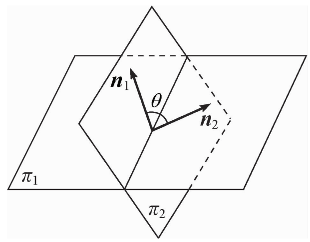



**图 8-26**

**例 6**　求两平面 $x-y-11=0$ 和 $3x+8=0$ 的夹角.

**解**　由公式 ②，得

$$\cos\theta=\frac{|1\times3+(-1)\times0+0\times0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故所求夹角 $\theta$ 为 $\dfrac{\pi}{4}$.

**例 7**　平面过 $z$ 轴，且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，求此平面方程.

**解**　平面过 $z$ 轴，则方程可设为 $Ax+By=0$. 由题意知

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{2^2+1^2+5}\cdot\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{A^2+B^2}},$$

即

$$|2A+B|=\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\sqrt{A^2+B^2},$$

解得 $A=\dfrac{B}{3}$ 或 $A=-3B$，所以所求平面方程为

$$x+3y=0 \text{ 或 } -3x+y=0.$$

两平面位置关系中比较特殊的情况是平行和垂直，而两平面平行就相当于其法向量相互平行，两平面垂直就相当于其法向量相互垂直. 设两平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的法向量分别为 $(A_1,B_1,C_1)$ 和 $(A_2,B_2,C_2)$，故 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 平行、垂直的充要条件分别为

(1) $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2 \neq 0)$.

特别地,$\pi_1$ 和 $\pi_2$ 重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}(A_2B_2C_2D_2 \neq 0)$.

(2) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

**注**:两平面相交的充要条件为$\dfrac{A_1}{A_2}, \dfrac{B_1}{B_2}, \dfrac{C_1}{C_2}$ 不全相等.

**例 8**　求通过 $x$ 轴,且垂直于平面 $5x + 4y - 2z + 14 = 0$ 的平面的方程.

**解**　设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$,平面 $5x + 4y - 2z + 14 = 0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1 = (5,4,-2)$. 由题意,$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{n}_1$,$\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{i}$,故

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-2,-4).$$

又所求平面过原点,所以其方程为

$$0 \cdot x - 2y - 4z = 0,\text{即 } y + 2z = 0.$$

## 三、点到平面的距离

下面讨论平面外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 $d$,如图 8-27 所示.

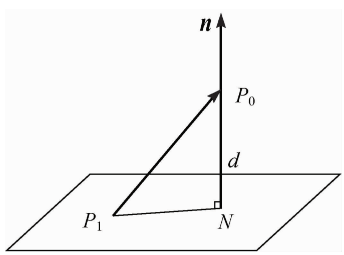



**图 8-27**

首先在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$,并设 $\boldsymbol{n} = (A,B,C)$ 为平面的法向量,则 $P_0$ 到这平面的距离为向量$\overrightarrow{P_1P_0}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影的绝对值,即

$$d = |\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{P_1P_0}|.$$

由数量积与投影的关系可得 $\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{n}| \operatorname{Prj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{P_1P_0}$,其中 $\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$,$|\boldsymbol{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$,于是

$$\operatorname{Prj}_{\boldsymbol{n}} \overrightarrow{P_1P_0} = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|}(\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \boldsymbol{n}) = \frac{(x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) \cdot (A,B,C)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}[A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)]$$

$$= \frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

又由于 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在平面上,故有 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$,因此,上式化为

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{P_1P_0} = \frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

于是,平面外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad ③$$

**例 9** 求两平行平面 $\pi_1$:$Ax+By+Cz+D_1=0$ 和 $\pi_2$:$Ax+By+Cz+D_2=0$ 的距离 $d$.

**解** 如图 8-28 所示.在平面 $\pi_1$ 上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则点 $P_0$ 到 $\pi_2$ 的距离就是平行平面间的距离,于是

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

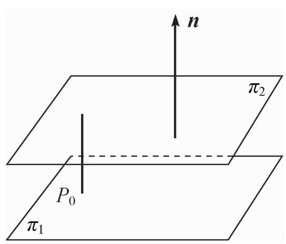



**图 8-28**

又由于 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是平面 $\pi_1$:$Ax+By+Cz+D_1=0$ 上的点,于是 $Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=0$,即 $Ax_0+By_0+Cz_0=-D_1$,代入式 ③,得

$$d = \frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

## 习题 8-3

1. 求过点$(1,0,-1)$且平行于平面 $x+2y-z+8=0$ 的平面方程.

2. 指出下列平面的特殊性质,并作图:

(1) $3x-2=0$; (2) $4y-7z=0$;

(3) $2x+3y-6=0$；　　(4) $x+2y-z=0$.

3. 求过三点 $A(1,1,-1)$，$B(-2,-2,2)$，$C(1,-1,2)$ 的平面方程，并求其在各坐标轴上的截距.

4. 求通过 $x$ 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程.

5. 求平面 $2x+y+2z-9=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

6. 试确定 $k$ 的值，使平面 $kx+y+z+k=0$ 与 $x+ky+kz+k=0$：

(1) 互相垂直；　　(2) 互相平行；　　(3) 重合.

7. 讨论以下各组中两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0$，$y+3z-1=0$；

(2) $2x-y+z-1=0$，$-4x+2y-2z-1=0$；

(3) $2x-y-z+1=0$，$-4x+2y+2z-2=0$.

8. 试求系数 $k$，使平面 $x+ky-2z=9$ 适合下列条件之一：

(1) 经过点 $(5,-4,-6)$；

(2) 与原点相距 3 个单位；

(3) 与平面 $2x-3y+z=0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

9. 求点 $(2,3,-2)$ 到平面 $2x-3y+5z-8=0$ 的距离.

# 第四节　空间直线及其方程

## 一、空间直线方程

### 1. 空间直线的点向式方程

首先给出直线的方向向量的概念. 已知直线 $L$，任意一个平行于 $L$ 的非零向量称为这条**直线的方向向量**，直线方向向量 $\boldsymbol{s}$ 的坐标 $m,n,p$ 称为这条**直线的方向数**，而向量 $\boldsymbol{s}$ 的方向余弦称为该**直线的方向余弦**. 显然，直线上任一向量都可视为该直线的方向向量.

在空间中给定直线 $L$ 上一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及它的一个方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，就可以唯一地确定直线 $L$ 的位置. 下面来建立直线 $L$ 的方程，如图 8-29 所示.

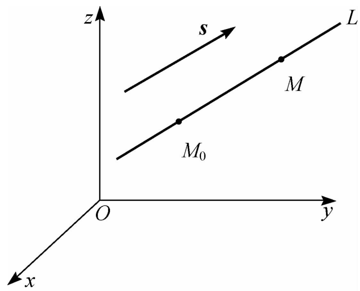



**图 8-29**

设 $M(x,y,z)$ 为直线 $L$ 上的任一点,那么有 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 平行,所以两向量的对应坐标成比例,从而有

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},\qquad ①$$

这就是直线 $L$ 的方程,称为**直线的点向式方程**或**对称式方程**.

因为 $\boldsymbol{s}\neq\boldsymbol{0}$,所以 $m,n,p$ 不全为零,但当 $m,n,p$ 中有一个为零,如 $m=0$ 时,方程① 成为 $\begin{cases}x=x_0,\\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p},\end{cases}$ 表示一条平行于 $yOz$ 面的直线,其上的点恒满足 $x=x_0$;而当 $m,n,p$ 中有两个为零,如 $m=n=0$ 时,方程① 成为 $\begin{cases}x=x_0,\\ y=y_0,\end{cases}$ 表示一条平行于 $z$ 轴的直线,其上的点恒满足 $x=x_0$,$y=y_0$.

**例 1** 求过点 $A(2,-3,4)$,且和 $y$ 轴垂直相交的直线的方程.

**解** 因为直线和 $y$ 轴垂直相交,所以交点为 $B(0,-3,0)$,于是取方向向量

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{BA}=(2,0,4),$$

因此,直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4},$$

也可写为 $\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{z-4}{4},\\ y=-3.\end{cases}$

**例 2** 已知两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,试求过 $M_1$,$M_2$ 的直线方程.

**解** 由直线过点 $M_1$ 和 $M_2$ 知,其方向向量 $\boldsymbol{s}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,于是直线的点向式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

**2. 空间直线的参数方程**

由直线的点向式方程，可以得出直线的参数方程.

设 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，则

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

此方程组就是**直线的参数方程**，其中 $t$ 为参数. 若 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为单位向量，则 $t$ 的绝对值代表动点 $M(x,y,z)$ 到定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离. $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 同向时，$t$ 为正；反向时，$t$ 为负.

**3. 空间直线的一般方程**

更一般的情况下，空间直线 $L$ 可以看做是两个平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 的交线. 设直线 $L$ 是平面 $\pi_1$：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $\pi_2$：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线（见图 8-30），则直线 $L$ 上的任一点坐标应同时满足这两个平面的方程，即

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \quad ②$$

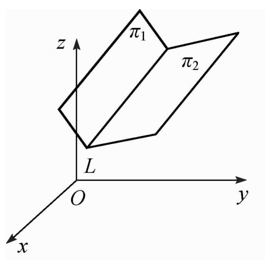


**图 8-30**

反之，若点 $M$ 不在直线 $L$ 上，显然它不可能同时在平面 $\pi_1$ 和 $\pi_2$ 上，所以其坐标必不满足上述方程组.

由此可见，直线 $L$ 可用方程组 ② 来表示，此方程组就称为空间**直线的一般方程**.

通过空间一直线 $L$ 的平面有无穷多个，把通过该直线的所有平面的全体称为**有轴平面束**，简称**平面束**，直线 $L$ 称为平面束的**轴**. 只要在平面束中任意选取两个平面，将其方程联立起来，所得方程组就表示空间直线 $L$.

**例 3**　已知直线的一般方程 $\begin{cases} 2x-3y+z=7, \\ 3x+2y-z=-1, \end{cases}$ 试求其点向式方程及参数方程.

**解** 首先任求直线上的一点,如令 $x=1$,可得到 $\begin{cases}-3y+z=5,\\2y-z=-4,\end{cases}$ 解得 $y=-1,z=2$,于是点 $(1,-1,2)$ 在直线上.

设两平面的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$,直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}$,则

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\3&2&-1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+13\boldsymbol{k},$$

因此,直线的点向式方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{13}.$$

令 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{13}=t$,得所给直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=t+1,\\y=5t-1,\\z=13t+2.\end{cases}$$

**例 4** 设两条不平行的直线 $L_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ 与 $L_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$,若在 $L_1$ 与 $L_2$ 上分别任取 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 两点,试证明 $L_1$ 与 $L_2$ 的距离为

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|},$$

其中 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 分别为 $L_1,L_2$ 的方向向量.

**证明** 由向量混合积的几何意义可知,$[\overrightarrow{M_1M_2}\boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]$ 的绝对值为以这三个向量为棱的平行六面体的体积,如图 8-31 所示.

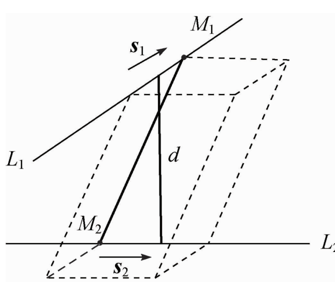



图 8-31

同时,这个平行六面体的体积 $V$ 还可表示为高与底面积的乘积,即 $V=d\cdot$

$|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|$，从而有

$$V=d\cdot|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|=|[\overrightarrow{M_1M_2}\ \boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]|,$$

由两直线不平行，可知$|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|\neq 0$，故有

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}\ \boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]|}{|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|}.$$

## 二、两直线的夹角及位置关系

### 1. 两直线的夹角

把两直线的方向向量的夹角 $\varphi$ 称为**两直线的夹角**，由于方向向量有两个方向，这里同样约定 $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

设直线 $L_1$ 和 $L_2$ 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(n_1,m_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(n_2,m_2,p_2)$，则 $L_1$ 和 $L_2$ 的夹角 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})$（或 $\pi-(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})$），因此，$\cos\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|$. 根据两向量夹角余弦的坐标表示式可得

$$\cos\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

**例 5**　已知直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$，$L_2:\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 试求这两直线的夹角.

**解**　两直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=(1,-2,1),\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(-1,-1,2),$$

其中 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 分别为 $L_2$ 所对应的两平面的法向量.

所以两直线的夹角 $\varphi$ 满足

$$\cos\varphi=\frac{|1\times(-1)+(-2)\times(-1)+1\times 2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{2},$$

故两直线的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

### 2. 两直线的位置关系

设两直线分别为 $L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$，$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$，其位置关系有三种情况：平行（包含重合），相交（包含垂直）和异面.

首先讨论两直线平行及垂直的条件. 由于两直线平行即其方向向量平行，两直线垂直即其方向向量垂直，故可得两直线平行与垂直的充分必要条件分别为：

(1) $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

(2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

当两直线不平行时,由直线的位置关系知,两直线可能相交,也可能异面.若两直线相交则两直线间的距离为0,异面则两直线间的距离不为0,结合例4可得如下结论:

(1) 若 $L_1$ 与 $L_2$ 相交,则 $|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|\neq 0$ 且 $[\overrightarrow{M_1M_2}\ \boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]=0$.

(2) 若 $L_1$ 与 $L_2$ 异面,则 $|\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2|\neq 0$ 且 $[\overrightarrow{M_1M_2}\ \boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]\neq 0$,

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 分别为 $L_1$ 与 $L_2$ 上的任意点,$\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$ 分别为 $L_1$ 与 $L_2$ 的方向向量.

## 三、直线与平面

### 1. 直线与平面的夹角

直线和它在平面上的投影直线间的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 称为**直线与平面的夹角**(见图8-32).

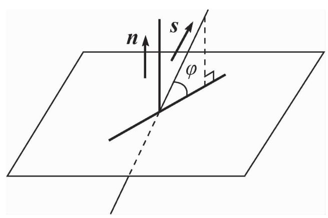



图 8-32

**注**:当直线与平面垂直时,直线在平面上的投影为点,此时规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$,平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$,直线与平面的夹角为 $\varphi$,则 $\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})\right|$,所以 $\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|$.由两向量夹角余弦的坐标表示式,有

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

**例 6** 设直线 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2}$,平面 $\pi:x-y+2z=3$,求直线与平面的夹角.

**解**　直线 $L$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(2,-1,2)$，平面 $\pi$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，则 $L$ 与 $\pi$ 的夹角 $\varphi$ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|1\times2+(-1)\times(-1)+2\times2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{7}{3\sqrt{6}},$$

因此，$L$ 与 $\pi$ 的夹角 $\varphi$ 为 $\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$.

**2. 直线与平面的位置关系**

直线与平面的位置关系有两种情况：相交(包含垂直)，平行(包含在平面上). 设直线 $L$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面 $\pi$ 的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，其法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则 $L$ 与 $\pi$ 垂直、平行的充要条件分别为：

(1) 因为 $L\perp\pi$ 相当于直线的方向向量与平面的法向量平行，即 $\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}$，故有

$$L\perp\pi\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

(2) 因为 $L\parallel\pi$ 相当于直线的方向向量与平面的法向量垂直，即 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}$，故有

$$L\parallel\pi\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$$

特别地，直线 $L$ 在平面 $\pi$ 上的充要条件为 $Am+Bn+Cp=0$，且对 $\forall M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$，有 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.

**例 7**　求过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程.

**解**　平面的法向量 $(2,-3,1)$，由于直线与平面垂直，故平面的法向量可作为所求直线的方向向量，因此，所求直线的方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

**例 8**　求过点 $(-1,0,4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，又与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交的直线方程.

**解**　设所求直线方程

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y-0}{n}=\frac{z-4}{p},$$

因为所求直线平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，所以

$$3m-4n+p=0.$$

又由于所求直线与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交，故有

$$\begin{vmatrix}-1-(-1) & 0-3 & 4-0\\ 1 & 1 & 2\\ m & n & p\end{vmatrix}=0,$$

即 $10m-4n-3p=0$.

由$\begin{cases}3m-4n+p=0,\\10m-4n-3p=0,\end{cases}$得

$$\frac{16}{m}=\frac{19}{n}=\frac{28}{p},$$

故所求直线方程为$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}$.

**3. 平面束方程**

有时应用平面束的方程解题比较方便. 下面介绍平面束的方程.

在已知直线 $L$ 的情况下,任取两个过该直线的平面 $\pi_1$:$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $\pi_2$:$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,即可得其一般方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases}$$

现在来考察三元一次方程

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$($\lambda$ 为任意常数),

整理可得

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+D_1+\lambda D_2=0, \qquad ③$$

由于$\pi_1$,$\pi_2$两平面相交,故系数$A_1$,$B_1$,$C_1$与$A_2$,$B_2$,$C_2$必不完全成比例,所以对任取 $\lambda$ 值,上述方程的系数必不全为零,从而这个三元一次方程可表示平面. 同时,对于不同的 $\lambda$ 值,它对应的平面也不同,而且这些平面显然都通过直线 $L$.

反之,通过直线 $L$ 的所有平面(除平面 $\pi_2$ 外)都包含在方程 ③ 所表示的一族平面内,于是把方程 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ 称为**过直线 $L$ 的平面束方程**.

**例 9** 设平面外一点$(1,-1,0)$到这平面的距离为$\frac{1}{\sqrt{2}}$,且该平面过直线 $L$:$\begin{cases}7x-y-2z=8,\\x-9y+8z=20,\end{cases}$求这平面的方程.

**解** 过直线 $L$ 的平面束方程为

$$7x-y-2z-8+\lambda(x-9y+8z-20)=0,$$

即

$$(\lambda+7)x-(9\lambda+1)y+(8\lambda-2)z-20\lambda-8=0,$$

其中 $\lambda$ 为待定常数. 由点$(1,-1,0)$到平面的距离为$\frac{1}{\sqrt{2}}$,得

$$\frac{|\lambda+7+9\lambda+1-20\lambda-8|}{\sqrt{(\lambda+7)^2+(9\lambda+1)^2+(8\lambda-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

解得 $\lambda=\pm 1$，代入平面束方程，得所求平面的方程为

$$4x-5y+3z-14=0 \text{ 或 } 3x+4y-5z+6=0.$$

## 习题 8-4

1. 用点向式方程及参数方程表示直线 $\begin{cases}x+y+z+1=0,\\ 2x-y+3z+4=0.\end{cases}$

2. 求过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行的直线方程.

3. 求过点 $P(2,-1,3)$ 且与直线 $L$：$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z-2}{2}$ 垂直相交的直线的方程.

4. 求直线 $L_1$：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 与 $L_2$：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角.

5. 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

6. 试确定下列各组中的直线和平面间的位置关系：

(1) $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z=3$；

(2) $\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\ 2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 和 $4x-2y+z=0$；

(3) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$.

7. 求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0,\\ 3x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

8. 求直线 $\begin{cases}x+y-z-1=0,\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

9. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

10. 设直线 $L$：$\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$，直线外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，若取 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 $L$ 上任意一点，试证 $M_0$ 到 $L$ 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$，其中 $\boldsymbol{s}$ 为直线 $L$ 的方向向量.

# 第五节　曲 面 方 程

空间解析几何实际上就是研究动点的几何轨迹.仅在一个条件下运动的空间点的轨迹一般来说是一个曲面,如到两定点距离和为常值的点的轨迹是椭球;而同时在两个条件下运动的空间点的轨迹往往是空间曲线,如当有三个不共线的点 $M_1$,$M_2$,$M_3$,与 $M_1$ 的距离为定值,而与 $M_2$ 和 $M_3$ 的距离相等的点的轨迹是圆.本节和下一节将通过分析动点的轨迹特征,建立关于动点坐标 $(x,y,z)$ 的曲面或曲线的方程.

## 一、曲面方程的概念

如果曲面 $S$ 上每一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$;而不在曲面 $S$ 上的点的坐标都不满足这个方程,则称方程 $F(x,y,z)=0$ 为**曲面 $S$ 的方程**,而称曲面 $S$ 为此**方程的图形**.

下面举例说明怎样从曲面上点的特征得出曲面方程.

**例 1**　如图 8-33 所示,求球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 $R$ 的球面方程.

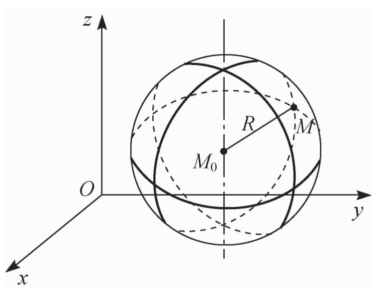



图 8-33

**解**　点 $M(x,y,z)$ 在以 $M_0$ 为球心,以 $R$ 为半径的球面上的充要条件为

$$|M_0M|=R,$$

即

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R, \quad ①$$

两边平方,得

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

显然,球面上的点的坐标都满足此方程,不在球面上的点的坐标都不满足这个方程,所以方程 ① 就是球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,半径为 $R$ 的球面的方程.

一般地,设有三元二次方程

$$Ax^2+Ay^2+Az^2+Dx+Ey+Fz+G=0,$$

这个方程有两个特点：一是缺 $xy$，$yz$，$zx$ 各交叉项；二是平方项系数相同. 一般来讲，具有上述特点的三元二次方程的图形是一个球面. 需要注意的是，此方程经配方后能还原为方程 ① 的形式，否则可能为虚球面.

**例 2**　求与原点 $O$ 及 $M_0(2,3,4)$ 的距离之比为 $1:2$ 的全体点组成的曲面方程.

**解**　设 $M(x,y,z)$ 是曲面上任一点，根据题意有 $\dfrac{|MO|}{|MM_0|}=\dfrac{1}{2}$，即

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

整理得 $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{116}{9}.$

这就是所求曲面上的点的坐标满足的方程，而不在该曲面上的点的坐标不满足此方程，所以它就是所求曲面的方程.

以上表明作为点的几何轨迹的曲面可以用它的点的坐标间的方程来表示. 反之，变量 $x$，$y$ 和 $z$ 间的方程通常表示一个曲面. 下面将以旋转曲面为例讨论问题：已知一曲面作为点的几何轨迹时，如何建立该曲面的方程？以柱面和二次曲面为例讨论问题：已知坐标 $x$，$y$，$z$ 间的一个方程时，研究这方程所表示的曲面的形状.

## 二、旋转曲面

设平面上有一条定直线和一条曲线，则该曲线绕定直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**，其中定直线称为旋转曲面的**轴**. 而旋转的动曲线称为旋转曲面的**母线**.

下面只讨论母线在某个坐标面上，它绕某个坐标轴旋转所形成的旋转曲面.

设在 $yOz$ 面上有一已知曲线 $C$，它的方程为

$$f(y,z)=0,$$

求此曲线 $C$ 绕 $z$ 轴旋转一周所形成的旋转曲面（见图 8-34）的方程.

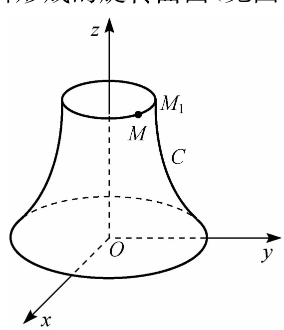



图 8-34

设$M_1(0,y_1,z_1)$为曲线$C$上的任一点,于是$M_1$的坐标必满足$f(y_1,z_1)=0$.当曲线$C$绕$z$轴旋转时,点$M_1$绕$z$轴转到另一点$M(x,y,z)$,此时,点$M$与$z$轴的距离等于点$M_1$到$z$轴的距离,且有同一竖坐标,即$|y_1|=\sqrt{x^2+y^2}$,$z=z_1$,将其代入$f(y_1,z_1)=0$,得

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0,$$

即为所求旋转曲面的方程.

综上所述,当已知母线$C$的方程为$f(y,z)=0$时,保留$z$形式不变,将$y$改成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,便得曲线$C$绕$z$轴旋转所成的旋转曲面的方程$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

同理,曲线$C$绕$y$轴旋转所成的旋转曲面的方程为$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

对于其他坐标面上的曲线,绕该坐标面上任何一条坐标轴旋转所生成的旋转曲面,其方程可以用上述类似方法求得.

**例3** 如图8-35所示,取两条相交且夹角$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$的直线,其中一条直线绕另一条直线旋转一周所得旋转曲面称为**圆锥面**.两直线的交点称为圆锥面的**顶点**,两直线的夹角$\alpha$称为圆锥面的**半顶角**.当将坐标原点$O$设在圆锥面的顶点处,并以$z$轴为旋转轴时,试建立圆锥面的方程.

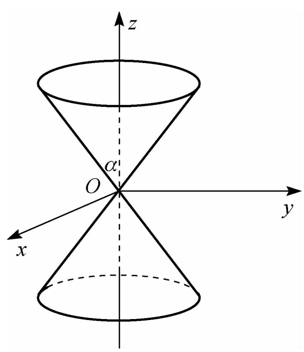



**图8-35**

**解** 在$yOz$面内,直线$L$的方程为

$$z=y\cot\alpha, \tag{②}$$

由于旋转轴为$z$轴,将方程②中的$y$改成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$,便得到圆锥面的方程

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha,$$

整理得

$$z^2=a^2(x^2+y^2),$$

其中 $a = \cot \alpha$.

事实上,以前学习过的椭圆、抛物线及双曲线都是由圆锥面得来的.用一个平面截圆锥面,当截面与其所有母线都相交,截线为椭圆;当截面与任一条母线平行,截线为抛物线;当截面与轴线平行,截线为双曲线的一支.

**例 4**　将 $zOx$ 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$分别绕 $x$ 轴和 $z$ 轴旋转一周,求所生成的旋转曲面的方程.

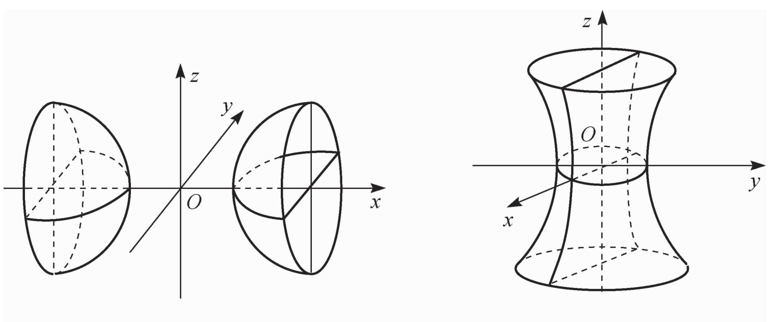
**解**　绕 $x$ 轴旋转所得的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1,$$

绕 $z$ 轴旋转所得的旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

这两种曲面分别称为**旋转双叶双曲面**和**旋转单叶双曲面**(见图 8-36).



(a)旋转双叶双曲面　　(b)旋转单叶双曲面

**图 8-36**

## 三、柱面

分别给定一条定直线 $l$ 和定曲线 $C$,则取平行于定直线 $l$ 的动直线 $L$,使之沿定曲线 $C$ 移动,由此形成的轨迹称为**柱面**,其中定曲线 $C$ 称为柱面的**准线**,动直线 $L$ 称为柱面的**母线**,如图 8-37 所示.

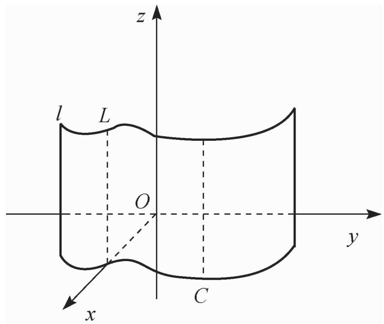



图 8-37

**例 5** 试讨论方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$表示什么样的曲面?

**解** 方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在平面解析几何中表示$xOy$面上以原点$O$为中心的椭圆曲线.但在空间直角坐标系中,此方程表示的应为一个曲面.

事实上,由于此方程不含竖坐标$z$,则对动点$M(x,y,z)$,无论$z$取何值,只要其横坐标$x$和纵坐标$y$满足比方程,那么这些点就在这曲面上.从而可知,过$xOy$面上的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一点$M(x,y,0)$且平行于$z$轴的直线一定在$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$表示的曲面上,它相当于由平行于$z$轴的直线$l$沿$xOy$面上的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$移动而形成,这个曲面称为**椭圆柱面**(见图 8-38),$xOy$面上的椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$称为它的**准线**,这平行于$z$轴的直线$l$称为它的**母线**.

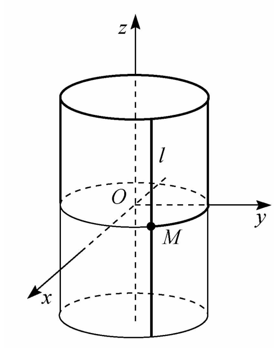



图 8-38

一般地，只含 $x,y$ 而缺 $z$ 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 $z$ 轴的柱面，其准线是 $xOy$ 面上的曲线 $F(x,y)=0$.

**例 6**　设 $\Gamma:\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\ z=0,\end{cases}$ 求以 $\Gamma$ 作为准线，母线平行于 $z$ 轴的柱面方程.

**解**　在柱面上任意取一点 $M(x,y,z)$，则点 $M$ 必在某条母线上，它与 $\Gamma$ 的交点为 $M_1(x,y,0)$（见图 8-39），从而有 $\varphi(x,y)=0$，又由点 $M$ 的任意性，故曲面上任一点都满足 $\varphi(x,y)=0$；另一方面，若 $M(x,y,z)$ 满足 $\varphi(x,y)=0$，则点 $M$ 必在经过 $(x,y,0)$ 的母线上，且 $z=0$. 故所求柱面方程为 $\varphi(x,y)=0$.

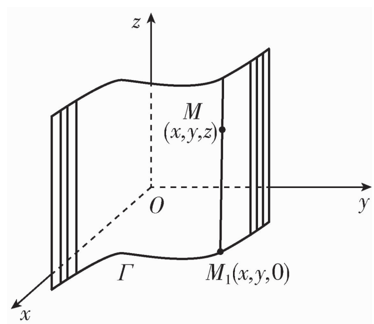



**图 8-39**

类似地，只含 $x,z$ 而缺 $y$ 的方程 $G(x,z)=0$ 和只含 $y,z$ 而缺 $x$ 的方程 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 $y$ 轴和 $x$ 轴的柱面.

例如，$x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆心在原点，半径为 2 的圆，在空间解析几何中表示母线平行于 $z$ 轴，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z=0\end{cases}$ 的圆柱面. 再如，$y=x+1$ 在平面解析几何中表示斜率为 1，截距也为 1 的一条直线，在空间解析几何中表示平行于 $z$ 轴的平面，该平面实际上也是一种柱面，称其为母线平行于 $z$ 轴，准线为 $\begin{cases}y=x+1,\\ z=0\end{cases}$ 的平柱面.

## 四、二次曲面

在空间直角坐标系中，若 $F(x,y,z)=0$ 是一次方程，则它的图形是一个平面，平面也称为一次曲面. 若 $F(x,y,z)=0$ 是二次方程，则它的图形称为二次曲面. 了解方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示曲面的形状的方法有很多，这里主要应用的方法有两种. 一种方法称为**截痕法**，是用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，考察其交线的形状，然后加以综合，从而了解曲面的立体形状. 另一种方法称为**伸缩变形法**.

设 $S$ 是一个曲面,其方程为 $F(x,y,z)=0$,假如 $S'$ 是将曲面 $S$ 沿 $x$ 轴方向伸缩 $\lambda$ 倍所得的曲面,显然,若 $(x,y,z)\in S$,则 $(\lambda x,y,z)\in S'$;若 $(x,y,z)\in S'$,则 $\left(\frac{1}{\lambda}x,y,z\right)\in S$. 因此,这个对于任意的 $(x,y,z)\in S'$,有 $F\left(\frac{1}{\lambda}x,y,z\right)=0$,即 $F\left(\frac{1}{\lambda}x,y,z\right)=0$ 是曲面 $S'$ 的方程.

从几何角度分类,二次曲面共有九种,适当选取空间直角坐标系,可得它们的标准方程. 下面就其标准方程来讨论它们的形状.

**1. 椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**

表示母线平行于 $z$ 轴的柱面(见图 8-38),它的准线是 $xOy$ 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

**2. 双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$**

表示母线平行于 $z$ 轴的柱面(见图 8-40),它的准线是 $xOy$ 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

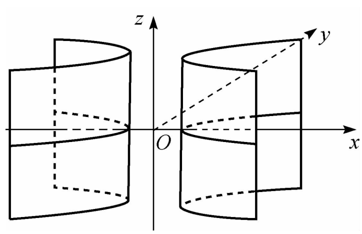



**图 8-40**

**3. 抛物柱面 $x^2=ay$**

表示母线平行于 $z$ 轴的柱面(见图 8-41),它的准线是 $xOy$ 面上的抛物线 $x^2=ay$.

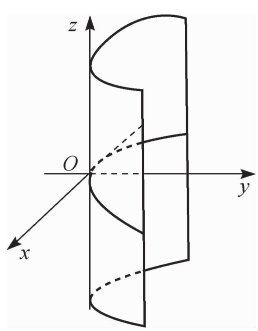



**图 8-41**

**4. 椭圆锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$**

首先应用截痕法了解一下此曲面的特征. 以垂直于 $z$ 轴的平面 $z=t$ 截此曲面，得一椭圆

$$\frac{x^2}{(at)^2}+\frac{y^2}{(bt)^2}=1(t\neq 0),$$

该式表示一族椭圆，但这些椭圆的长短轴比例不变. $t=0$ 时，得一点(0,0,0). 当 $|t|$ 从大到小直至达到 0 时，这族椭圆将从大变到小直至缩为一点，因此，椭圆锥面的形状如图 8-42 所示.

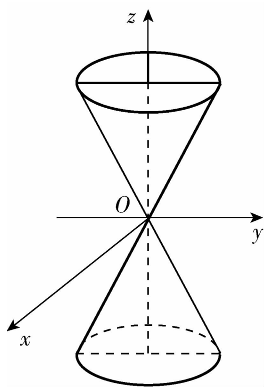



**图 8-42**

当然，也可以用伸缩变形法来分析. 把圆锥面$\frac{x^2+y^2}{a^2}=z^2$(见图 8-35)沿 $y$ 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$ 倍，所得曲面是椭圆锥面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$.

**5. 椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$**

用截痕法来讨论这个曲面的形状. 用 $xOy$ 面 $z=0$ 和平行于 $xOy$ 面的平面 $z=h(|h|\leqslant c)$ 去截曲面，其截痕分别为椭圆，且 $|h|$ 由 0 逐渐增大到 $c$ 时，椭圆由大变小，逐渐缩为一点. 同样用 $zOx$ 面与平行于 $zOx$ 面的平面去截曲面和用 $yOz$ 面与平行于 $yOz$ 面的平面去截曲面，它们的交线与上述结果类同. 综上所述，椭球面的形状如图 8-43 所示.

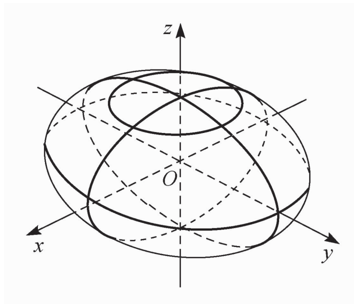



**图 8-43**

### 6. 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

用伸缩变形法来分析. 先将 $zOx$ 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕 $z$ 轴旋转,可得旋转单叶双曲面$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$(见图 8-36b);再沿 $y$ 轴方向伸缩$\frac{b}{a}$倍,即得单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

### 7. 双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

用伸缩变形法来分析. 先将 $zOx$ 面上的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$绕 $x$ 轴旋转,可得旋转双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2+y^2}{c^2}=1$(见图 8-36a);再沿 $y$ 轴方向伸缩$\frac{b}{c}$倍,即得双叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

### 8. 椭圆抛物面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

用截痕法来分析. 用 $xOy$ 面去截曲面,截痕是一点$(0,0)$,称为椭圆抛物面的顶点. 用平行于 $xOy$ 面的平面$z=h(h>0)$截此曲面,其交线为 $z=h$ 平面上的椭圆,且当 $h$ 增大时,椭圆的半轴也随着增大. 若用平面 $x=h$ 或 $y=h$ 截曲面,其交线分别为抛物线. 综上所述,椭圆抛物面的形状如图 8-44 所示.

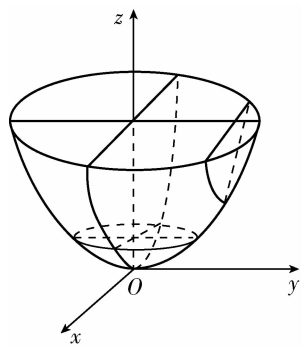



图 8-44

**9. 双曲抛物面$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$**

用截痕法分析其图形特征. 用平面 $x=t$ 截此曲面，得一抛物线

$$-\frac{y^2}{b^2}=z-\frac{t^2}{a^2},$$

此抛物线顶点坐标为$\left(t,0,\frac{t^2}{a^2}\right)$，开口朝下. 当 $t$ 变化时，抛物线的形状保持不变，只随顶点的位置变化作平移，其中抛物线的顶点轨迹为平面 $y=0$ 上的抛物线 $z=\frac{x^2}{a^2}$. 因此，双曲面抛物线的形状如图 8-45 所示，也称为**马鞍面**.

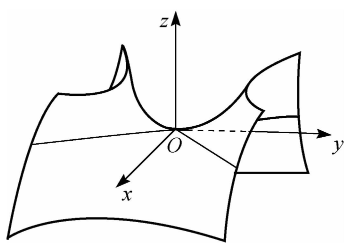



图 8-45

前面提及的旋转曲面中也有二次曲面，如圆锥面，旋转双叶双曲面和旋转单叶双曲面，它们分别是椭圆锥面、双叶双曲面和单叶双曲面的特例.

## 习题 8-5

1. 已知 $A(1,2,3)$,$B(2,-1,4)$,求线段 $AB$ 的垂直平分面的方程.

2. 方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z=0$ 表示什么曲面?

3. 求按如下方法所生成的旋转曲面的方程:

(1) 将 $zOx$ 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 $x$ 轴旋转一周;

(2) 将 $zOx$ 坐标面上的圆 $x^2+z^2=4$ 绕 $z$ 轴旋转一周;

(3) 将 $xOy$ 坐标面上的 $4x^2-9y^2=36$ 分别绕 $x$ 轴及 $y$ 轴旋转一周.

4. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$;　　(2) $x^2+y^2-\dfrac{z^2}{9}=1$;

(3) $x^2-y^2+z^2=1$;　　(4) $(z-2)^2=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}$.

5. 画出下列方程所表示的曲面,并指出其名称:

(1) $9x^2+y^2-z^2=9$;　　(2) $x^2-9y^2-z^2=9$;

(3) $\dfrac{z}{2}=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$;　　(4) $4x^2-9y^2-16z^2=-25$.

6. 画出下列方程所表示的曲面所围区域:

(1) 由曲面 $z=2x^2+y^2$ 及 $z=3-x^2$ 所围成的闭区域;

(2) 由双曲抛物面 $cz=xy(c>0)$,$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的闭区域.

7. 画出下列各方程所表示的曲面,并说明在平面解析几何中和在空间解析几何中它们分别表示什么图形:

(1) $y=-2$;　　(2) $x^2+(y-6)^2=36$;

(3) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$;　　(4) $-\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$;

(5) $4z=4-y^2$;　　(6) $y=\dfrac{1}{x}$.

# 第六节　空间曲线方程

## 一、空间曲线及其方程

### 1. 空间曲线的一般方程

若要确定一条空间曲线的方程,最简单的方法就是把它看作两个曲面的交线.设

$$F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0$$

是两个曲面方程，交线 $C$ 上的点的坐标都应同时满足这两个方程，不在 $C$ 上的点的坐标不能同时满足这两个方程，因此，联立方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad ①$$

即为空间曲线 $C$ 的方程，方程组 ① 称为**空间曲线的一般方程**.

**例 1**　方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

**解**　方程组中第一个方程表示球心在坐标原点 $O$，半径为 $2a$ 的上半球面. 第二个方程表示以 $z$ 轴为旋转轴的圆锥面，方程组就表示上述半球面与圆锥面的交线，交线图形为圆，圆心在点$(0,0,\sqrt{2}a)$，半径为$\sqrt{2}a$.

**2. 空间曲线的参数方程**

空间曲线 $C$ 的方程也可以用参数形式表示. 事实上，若动点的坐标 $x,y,z$ 都可表示为参数 $t$ 的函数

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$$

这个方程组就称为**空间曲线的参数方程**.

**例 2**　若空间一点 $M$ 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 $\omega$ 绕 $z$ 轴旋转，同时又以线速度 $v$ 沿平行于 $z$ 轴的正方向上升(其中 $\omega,v$ 都是常数)，那么点 $M$ 构成的图形称为**螺旋线**(见图 8-46). 试建立其参数方程.

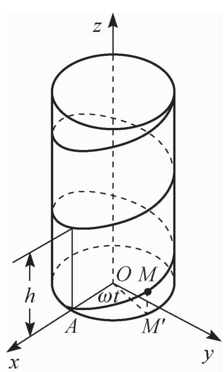



**图 8-46**

**解**　取时间 $t$ 为参数. 设当 $t=0$ 时，动点位于 $x$ 轴上的一点 $A(a,0,0)$ 处. 经过时

间 $t$,动点由 $A$ 运动到 $M(x,y,z)$. 记 $M$ 在 $xOy$ 面上的投影为 $M'$,$M'$ 的坐标为 $(x,y,0)$. 由于动点在圆柱面上以角速度 $\omega$ 绕 $z$ 轴旋转,所以经过时间 $t$,$\angle AOM' = \omega t$. 从而

$$x = |OM'|\cos\angle AOM' = a\cos\omega t$$

$$y = |OM'|\sin\angle AOM' = a\sin\omega t,$$

由于动点同时以线速度 $v$ 沿平行于 $z$ 轴的正方向上升,所以

$$z = MM' = vt,$$

因此螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

也可以用其他变量作参数,如令 $\theta = \omega t$,则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}$$

其中 $b = \dfrac{v}{\omega}$,而参数为 $\theta$.

下面顺便介绍一下曲面的参数方程. 曲面的参数方程通常是含两个参数的方程,形如

$$\begin{cases} x = x(s,t), \\ y = y(s,t), \\ z = z(s,t). \end{cases}$$

比较常用的是旋转曲面的参数方程. 已知空间曲线 $\Gamma$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

则 $\Gamma$ 绕 $z$ 轴旋转,所得旋转曲面的方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}\cos\theta, \\ y = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}\sin\theta, (\alpha \leqslant t \leqslant \beta, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad ②$$

这是因为固定一个 $t$,得 $\Gamma$ 上一点 $M_1(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$,点 $M_1$ 绕 $z$ 轴旋转,得空间的一个圆,该圆在平面 $z = \omega(t)$ 上,其半径为点 $M_1$ 到 $z$ 轴的距离 $\sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2}$,因此,固定 $t$ 的方程 ② 就是该圆的参数方程. 再令 $t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内变动,方程 ② 便是旋转曲面的方程.

**例 3** 试将球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 化为参数方程.

**解** 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 可看成 $zOx$ 面上的半圆周

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi, \\ y=0, \qquad (0\leqslant\varphi\leqslant\pi) \\ z=a\cos\varphi \end{cases}$$

绕 $z$ 轴旋转所得,故球面方程为

$$\begin{cases} x=a\sin\varphi\cos\theta, \\ y=a\sin\varphi\sin\theta, (0\leqslant\varphi\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi). \\ z=a\cos\varphi \end{cases}$$

## 二、空间曲线在坐标面上的投影

以曲线$C$为准线、母线平行于$z$轴的柱面称为曲线$C$关于$xOy$面的**投影柱面**,投影柱面与$xOy$面的交线称为空间曲线$C$在$xOy$面上的**投影曲线**,或简称**投影**.类似地可以定义曲线$C$在其他坐标面上的投影.

在重积分和曲面积分的计算中,常常要确定这样的投影曲线.事实上,往往通过投影柱面的方程来确定投影曲线.

设空间曲线$C$的一般方程为$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$将方程组消去变量$z$,得方程$H(x,y)=0$,这就是曲线$C$关于$xOy$面的投影柱面.

一方面方程$H(x,y)=0$表示一个母线平行于$z$轴的柱面,另一方面方程$H(x,y)=0$是由方程组消去变量$z$后所得的方程,因此当$x,y,z$满足方程组时,$x$,$y$必定满足方程$H(x,y)=0$,这就说明曲线$C$上的所有点都在方程$H(x,y)=0$所表示的曲面上,即曲线$C$在方程$H(x,y)=0$表示的柱面上.所以方程$H(x,y)=0$表示的柱面就是曲线$C$关于$xOy$面的投影柱面.

曲线$C$在$xOy$面上的投影曲线的方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

类似地,消去方程组中的$x$,得到在$yOz$面上曲线的投影方程$\begin{cases} R(y,z)=0, \\ x=0; \end{cases}$消去$y$,得到在$zOx$面上曲线的投影方程$\begin{cases} T(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$

**例 4** 分别求曲线$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$关于$yOz$面和$zOx$面的投影柱面方程.

**解** (1) $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 中消去 $x$,得 $3y^2-z^2=16$,这就是所求母线平行于 $x$ 轴且通过该曲线的柱面方程,即为 $yOz$ 面上的投影柱面方程.

(2) $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 中消去 $y$,得 $3x^2+2z^2=16$,这就是所求母线平行于 $y$ 轴且通过该曲线的柱面方程,即为 $zOx$ 面上的投影柱面方程.

**例 5** 求螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线方程.

**解** (1) 由 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta\end{cases}$ 得 $x^2+y^2=a^2$,则螺旋线在 $xOy$ 面上投影曲线方程为 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\z=0.\end{cases}$

(2) 由 $\begin{cases}y=a\sin\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 得 $y=a\sin\dfrac{z}{b}$,则螺旋线在 $yOz$ 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}y=a\sin\dfrac{z}{b},\\x=0.\end{cases}$

(3) 由 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\z=b\theta\end{cases}$ 得 $x=a\cos\dfrac{z}{b}$,则螺旋线在 $zOx$ 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases}x=a\cos\dfrac{z}{b},\\y=0.\end{cases}$

**例 6** 求上半球 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与圆柱体 $x^2+y^2\leqslant ax\,(a>0)$ 的公共部分在 $xOy$ 和 $zOx$ 面上的投影(见图 8-47).

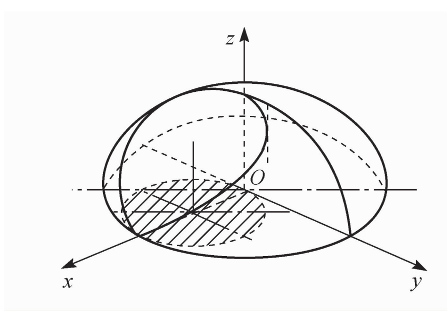



**图 8-47**

**解**　(1) 由 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 知，在 $xOy$ 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}, \\ z=0, \end{cases}$ 从而立体在 $xOy$ 面上的投影为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leqslant\frac{a^2}{4}$.

(2) 由 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 知，在 $zOx$ 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} z^2+ax=a^2, \\ y=0, \end{cases}$ 从而立体在 $zOx$ 面上的投影为 $z^2+ax\leqslant a^2, x\geqslant 0, z\geqslant 0$.

## 习题 8-6

1. 以下方程组表示怎样的曲线：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 2x+3y+3z=6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}. \end{cases}$

2. 试求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=b\theta \end{cases}$ 的一般方程.

3. 将下列曲线的一般方程化为参数方程：

(1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9, \\ y=x; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} (x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4, \\ z=0. \end{cases}$

4. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 4)$ 在三个坐标面上的投影.

5. 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影柱面方程.

6. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线方程.

## 本章小结

### 一、基本内容

(1) 本章给出了空间解析几何中的主要概念，包括向量，向量的方向余弦，向量在轴上的投影以及相关的曲面、曲线、平面、直线的方程. 直线、平面和曲面的方程如

下表所示.

| | | |
|---|---|---|
| 平面方程 | 点法式方程 | $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$,其中$(x_0,y_0,z_0)$为平面上一定点,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量 |
| | 一般式方程 | $Ax+By+Cz+D=0$,$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$为平面的法向量 |
| | 截距式方程 | $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$,其中$a,b,c$依次为平面在$x,y,z$轴上的截距 |
| | 三点式方程 | $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$,其中$M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,$M_3(x_3,y_3,z_3)$为平面上的三点 |
| 直线方程 | 点向(对称)式方程 | $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,其中$(x_0,y_0,z_0)$为直线上一定点,$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量 |
| | 参数方程 | $x=x_0+mt,y=y_0+nt,z=z_0+pt$,其中$(x_0,y_0,z_0)$为直线上一定点,$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线的方向向量 |
| | 一般方程 | $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$其中$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$分别为两个平面的法向量 |
| 曲面方程 | 旋转曲面方程 | $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$,曲线$f(y,z)=0$绕$z$轴旋转;$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$,曲线$f(y,z)=0$绕$y$轴旋转.对于其他坐标面上的曲线,绕该坐标面上任一坐标轴旋转所生成的旋转曲面方程可用类似方法求得 |
| | 柱面方程 | $F(y,z)=0$,母线平行于$x$轴;$F(x,z)=0$,母线平行于$y$轴;$F(x,y)=0$,母线平行于$z$轴 |
| | 二次曲面方程 | 包括九种 |

(2)掌握两个平面之间、两条直线之间及平面与直线之间的关系.

① 两个平面之间的关系.设平面$\pi_1$的法向量$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$,平面$\pi_2$的法向量$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$.

| | |
|---|---|
| 两平面相交 | $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ 不成立 |
| 两平面垂直 | $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ |
| 两平面平行 | $\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2(\lambda\neq0)\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}(A_2B_2C_2\neq0)$ |
| 两平面重合 | $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}(A_2B_2C_2D_2\neq0)$ |

② 两条直线之间的关系. 设直线 $L_1$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 $L_1$ 经过的一点；直线 $L_2$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为 $L_2$ 经过的一点.

| | |
|---|---|
| 两直线不共面 | $\lvert\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\rvert\neq0$ 且 $[\overrightarrow{M_1M_2}\ \boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]\neq0$，其中 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ |
| 两直线不共面但相互垂直 | $\lvert\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\rvert\neq0$，$[\overrightarrow{M_1M_2}\ \boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]\neq0$，$\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$ |
| 两直线垂直相交 | $\lvert\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2\rvert\neq0$，$[\overrightarrow{M_1M_2}\ \boldsymbol{s}_1\ \boldsymbol{s}_2]=0$，且 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0$ |
| 两直线平行 | $\boldsymbol{s}_1\parallel\boldsymbol{s}_2$，即 $\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{0}$ |
| 两直线重合 | $\overrightarrow{M_1M_2}\parallel\boldsymbol{s}_1\parallel\boldsymbol{s}_2$ |

③ 平面与直线之间的关系. 设平面 $\pi$：$Ax+By+Cz+D=0$，直线 $L$：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，这里 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量，$\boldsymbol{s}=(m,n,,p)$ 为直线的方向向量.

| | |
|---|---|
| 平面与直线相交但不垂直 | $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{s}$ 不成立 |
| 平面与直线垂直 | $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{s}$，即 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}$ |
| 平面与直线平行 | $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$，即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$ |
| 直线在平面上 | $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，其中 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线 $L$ 上的任意一点 |

(3) 要会求两平面之间、两直线之间及直线与平面间的夹角.

① 平面 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 之间的夹角 $\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 满足

$$\cos\theta=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2})|=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}},$$

其中 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$与 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$分别为平面 $\pi_1$ 与 $\pi_2$ 的法向量.

② 直线 $L_1$ 与直线 $L_2$ 之间的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$满足

$$\cos\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2})|=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}},$$

其中 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$与 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$分别为直线 $L_1$ 与直线 $L_2$ 的方向向量.

③ 直线 $L$ 与平面 $\pi$ 的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$满足

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

其中 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$与 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$分别为直线的方向向量与平面的法向量.

(4) 掌握点到平面的距离公式和点到直线的距离公式.

① 点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(2) 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $L$:$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$ 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$,

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 $L$ 上任一点,$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$为直线 $L$ 的方向向量.

## 二、重点

(1) 向量的线性运算、数量积、向量积的概念及坐标表示.

(2) 两个向量垂直和平行的条件.

(3) 平面方程和直线方程.

(4) 平面与平面、平面与直线、直线与直线之间位置关系的判定条件.

(5) 常用二次曲面的方程及其图形.

(6) 旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

## 三、难点

(1) 向量积的概念及坐标表示.

(2) 空间曲线在坐标面上的投影柱面和投影曲线方程.

(3) 二次曲面图形.

## 总复习题八

1. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,问下列各式在什么条件下成立?

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$;　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$;

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$;　　(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$.

2. 设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$,$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,求 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

3. 设 $\boldsymbol{a}=(1,4,5)$,$\boldsymbol{b}=(1,1,2)$.(1) 求 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;(2) 求 $\lambda$,使 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

4. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量,且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,求 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$.

5. 设 $|\boldsymbol{a}|=4$,$\boldsymbol{b}=3$,$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$,求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

6. 已知点 $A(1,0,0)$ 及点 $B(0,2,1)$,试在 $z$ 轴上求一点 $C$,使 $\triangle ABC$ 的面积最小.

7. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,1,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,2,1)$,$\boldsymbol{c}=(1,1,2)$,$\boldsymbol{h}=(3,2,1)$.问 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面,并求 $x,y,z$ 使 $\boldsymbol{h}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$.

8. 求直线 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 在平面 $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 $L_0$ 的方程,并求 $L_0$ 绕 $y$ 轴旋转一周所成的曲面方程.

9. 求顶点在原点,准线为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{z^2}{3}=1,\\ y=2\end{cases}$ 的锥面方程.

10. 求过直线 $L_1$:$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ 和 $L_2$:$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 的平面方程.

11. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 的参数方程.

12. 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线 $L$ 在 $xOy$ 面上的投影.

13. 求 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 所围立体在 $xOy$ 面上的投影.

14. 求直线 $\begin{cases}2x-4y+z=0,\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线的方程.

15. 求过点 $M(1,2,5)$ 且与直线 $L_1$:$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-5}{2}$ 相交,并和向量 $\boldsymbol{j}=$

$(0,1,0)$成$\frac{\pi}{4}$角的直线 $L$ 的方程.

16. 平面过 $z$ 轴,且与平面 $2x+y-\sqrt{5}z=0$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$,求此平面方程.

17. 设一平面垂直于平面 $z=0$,并通过从点$(1,-1,1)$到直线$\begin{cases}y-z+1=0,\\x=0\end{cases}$的垂线,求此平面的方程.

18. 在一切过直线 $L$:$\begin{cases}x+y+z+1=0,\\2x+y+z=0\end{cases}$的平面中找出平面 $\pi$,使原点到它的距离为最长.

19. 求过直线 $L$:$\begin{cases}x+28y-2z+17=0,\\5x+8y-z+1=0\end{cases}$且与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 相切的平面方程.

20. 求直线 $L_1$:$\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ 和 $L_2$:$\begin{cases}x=z,\\y=-6z-7\end{cases}$之间的距离.

21. 已知直线 $L$:$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z}{5}$,求:

(1)$L$ 在平面 $z=1$ 上的投影 $L_1$ 的方程; (2) 点 $M(1,2,1)$ 到 $L_1$ 的距离.

22. 画出下列曲面所围立体图形:

(1) $x=0,y=0,z=0,x^2+y^2=R^2,y^2+z^2=R^2$(在第 Ⅰ 卦限内);

(2) 半径为 $a$ 的球面与半顶角为 $\alpha$ 的锥面所围成的立体;

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的在抛物面内的那一部分;

(4) 曲线 $y^2=2z,x=0$ 绕 $z$ 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=2,z=8$ 所围的立体.

第九章

# 多元函数微分学

前几章讨论的都是只有一个自变量的函数. 在实际中,研究的问题往往牵涉多方面的因素,从数量关系的角度来看,就是一个变量依赖于几个自变量的情况. 因此有必要进一步研究多元函数以及多元函数的微积分学.

本章将在一元函数微分学的基础上讨论多元函数的微分学. 讨论中以二元函数为主要对象,这是因为从一元函数到二元函数会产生许多新的问题,而从二元到二元以上的多元函数则可以类推.

## 第一节　多 元 函 数

为了将一元函数微积分推广到多元的情形,首先要将一元函数中基于 $\mathbf{R}^1$ 的点集和邻域等概念推广到 $\mathbf{R}^2$ 中,为此首先引入平面点集.

### 一、平面点集

把建立了坐标系的平面称为**坐标平面**,此时平面上的点 $P$ 就与有序实数组 $(x,y)$ 一一对应,反过来说,二元有序实数组 $(x,y)$ 的全体也就是坐标平面,即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$.

坐标平面上具有某种性质 $P$ 的点的集合,称为**平面点集**,记为 $E=\{(x,y)|(x,y)\text{具有性质}P\}$,其余集记为 $E^c$.

例如,半平面的集合可以表示为 $A=\{(x,y)|x\geqslant 0\}$,平面上以原点为中心、$r$ 为半径的圆内所有点的集合为 $C=\{(x,y)|x^2+y^2<r^2\}$. 但平面点集的表示方式并不唯一,如 $\{(x,y)\mid x>0\}$,$\{(x,y)\mid x>a\}$,$\{(x,y)\mid y\geqslant ax+b\}$ 等也可表示

半平面的集合 $A$. 若以点 $P$ 表示圆上任一点 $(x,y)$,以 $|OP|$ 表示点 $P$ 到原点 $O$ 的距离,则圆内所有点的集合 $C$ 还可表示成 $C=\{P \mid |OP|<r\}$.

邻域是平面点集中最常用的概念之一. 设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $xOy$ 面上的一个点,$\delta$ 是某一正数. 与点 $P_0(x_0,y_0)$ 的距离小于 $\delta$ 的点 $P(x,y)$ 的全体,称为点 $P_0$ 的 **$\delta$ 邻域**,记为 $U(P_0,\delta)$,即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\} \text{ 或 } U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

在几何上,邻域 $U(P_0,\delta)$ 表示 $xOy$ 面上以点 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心、$\delta>0$ 为半径的圆内部的点 $P(x,y)$ 的全体,所以有时也称这种邻域为圆邻域.

点 $P_0$ 的去心 $\delta$ 邻域,记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$,即

$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|P_0P|<\delta\}$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}.$$

如果不需要强调邻域的半径 $\delta$,则用 $U(P_0)$ 表示点 $P_0$ 的某个邻域,用 $\mathring{U}(P_0)$ 表示点 $P_0$ 的某个去心邻域.

以下应用邻域的概念来描述点和点集之间的关系.

(1) 依据点与点集的位置关系,任意一点 $P\in\mathbf{R}^2$ 与任意一个点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 之间必有以下三种关系中的一种(见图 9-1).

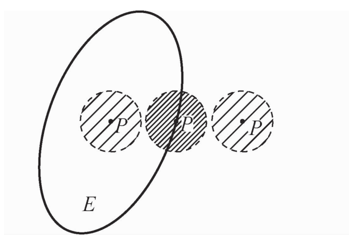



**图 9-1**

① **内点**:若存在点 $P$ 的某邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\subset E$,则称点 $P$ 为点集 $E$ 的内点.

② **外点**:若存在点 $P$ 的某邻域 $U(P)$,使得 $U(P)\cap E=\varnothing$,则称点 $P$ 为点集 $E$ 的外点.

③ **边界点**:若在点 $P$ 的任何邻域内既有属于 $E$ 的点,又有不属于 $E$ 的点,则称点 $P$ 为点集 $E$ 的边界点. $E$ 的全体边界点构成 $E$ 的**边界**,记为 $\partial E$.

显然,$E$ 的内点必属于 $E$;$E$ 的外点必定不属于 $E$;$E$ 的边界点可能属于 $E$,也可

以不属于 $E$.

(2) 依据点与点之间的凝聚程度，点还可分为聚点和孤立点.

① **聚点**：若在点 $P$ 的任何空心邻域$\mathring{U}(P_0)$ 内都含有 $E$ 中的点，则称点 $P$ 是点集 $E$ 的**聚点**. 聚点本身，可以属于 $E$，也可能不属于 $E$.

② **孤立点**：若 $P\in E$，存在某一正数 $\delta$，使得$\mathring{U}(P,\delta)\cap E=\varnothing$，则称点 $P$ 是$E$ 的**孤立点**. 孤立点必为外点.

**例 1**　设平面点集 $E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$，确定 $E$ 的内点、外点、边界点及聚点.

**解**　满足 $0<x^2+y^2<1$ 的一切点$(x,y)$都是$E$ 的内点；$x^2+y^2>1$ 的一切点$(x,y)$都是 $E$ 的外点；$(0,0)$是 $E$ 的边界点，不属于 $E$，满足 $x^2+y^2=1$ 的一切点$(x,y)$也是$E$ 的边界点，它们都属于$E$；点集$E$以及它的边界 $\partial E$ 上的一切点，即满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的点都是 $E$ 的聚点.

下面再来定义一些重要的平面点集.

(1) 开集和闭集.

若点集$E$的点都是内点，则称$E$为**开集**，而若点集$E$的余集$E^c$ 为开集，则称$E$为**闭集**.

例如，$E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$为开集；$E=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$为闭集；$E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant 1\}$既非开集，也非闭集.

(2) 开区域和闭区域.

若非空开集 $E$ 具有连通性，即 $E$ 内任何两点，都可用折线连结起来，且该折线上的点都属于 $E$，则称 $E$ 为**开区域**. 开区域连同其边界所构成的点集称为**闭区域**.

例如，$E=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$是开区域；$E=\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$为闭区域.

(3) 有界集和无界集.

对于平面点集 $E$，若存在某一正数 $r$，使得 $E\subset U(O,r)$，其中 $O$ 是坐标原点，则称 $E$ 为**有界集**；否则称 $E$ 为**无界集**.

例如，集合$\{(x,y)\mid 0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$是有界集；集合$\{(x,y)\mid xy>0\}$是无界集.

## 二、$n$ 维空间

已知数轴上的点与实数有一一对应关系，从而实数的全体表示数轴上一切点的集合 $\mathbf{R}^1$，即直线. 在平面上引入直角坐标系后，平面上的点与二元有序数组$(x,y)$一一对应，从而二元有序数组$(x,y)$的全体表示平面上一切点的集合 $\mathbf{R}^2$，即平面. 在空

间引入直角坐标系后,空间的点与三元有序数组$(x,y,z)$一一对应,从而三元有序数组$(x,y,z)$的全体表示空间一切点的集合$\mathbf{R}^3$,即空间.更一般地,设$n$为任一取定的自然数,则以$\mathbf{R}^n$表示$n$元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体所构成的集合,即

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

$\mathbf{R}^n$中的元素$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也称为$\mathbf{R}^n$中的一个**点**或一个 **$n$ 维向量**,$x_i$称为点$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的**第 $i$ 个坐标**或$n$维向量的**第 $i$ 个分量**.特别地,当所有的$x_i$都为零时,称这样的元素为$\mathbf{R}^n$中的零元,记为$\mathbf{0}$,$\mathbf{R}^n$中的零元也称为$\mathbf{R}^n$中的**坐标原点**或 **$n$ 维零向量**.有时$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$也可用一个字母$\boldsymbol{x}$来表示,即$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

为了在集合$\mathbf{R}^n$中的元素间建立联系,在$\mathbf{R}^n$中定义线性运算.

设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$为$\mathbf{R}^n$中任意两个元素,$\lambda\in\mathbf{R}$,规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$
$$\lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

这样定义了线性运算的集合$\mathbf{R}^n$称为 **$n$ 维空间**.

为探讨$n$维空间中的邻域及极限等概念,还要在$\mathbf{R}^n$中定义距离.

$\mathbf{R}^n$中点$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和点$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离,记为$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$或$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$(在$\mathbf{R}^1$,$\mathbf{R}^2$,$\mathbf{R}^3$中,通常记为$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$),规定

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

特殊地,当$n=1,2,3$时即为数轴、平面、空间两点间的距离.

下面据此来定义$\mathbf{R}^n$中的邻域.

设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$,$\delta$为某一正数,则$n$维空间内的点集

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\mid\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\}$$

就定义为$\mathbf{R}^n$中点$\boldsymbol{a}$的 **$\delta$ 邻域**.

以邻域为基础,可以定义$\mathbf{R}^n$中点集的内点、外点、边界点和聚点,以及开集、闭集、区域等一系列概念,请读者尝试自己进行定义.

## 三、多元函数的定义

先看下面两个例子.

**例 2** 长方体的体积$V$和它的棱长$a,b,c$之间具有关系$V=abc$.当$a,b,c$在集合$\{(a,b,c)\mid a>0,b>0,c>0\}$内取定一组值$(a,b,c)$时,$V$的对应值就随之确定.

**例 3** 一定量的理想气体的体积$V$与绝对温度$T$和压强$p$之间有关系$p=R\dfrac{T}{V}$,其中$R$是常数.当$V,T$在集合$\{(V,T)\mid V>0,T>T_0\}$内取定一对值

$(V,T)$时，$p$ 的对应值就随之确定.

上面两个例子虽然实际意义不同，但反映出一个共同的特性，即多个变量之间的相互依赖关系，这种关系反映到数学中便是多元函数，以下着重探讨二元函数.

**定义 1**　设$x,y,z$是三个变量，$D$是平面上的一个点集. 如果按照某种对应法则$f$，对于每个点$P(x,y)\in D$，变量$z$总有唯一确定的数值与之对应，则称$z$是定义在$D$上的**二元函数**，记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D \text{ 或 } z=f(P),P\in D,$$

点集$D$称为该函数的**定义域**，$x,y$称为**自变量**，$z$称为**因变量**. 数集$f(D)=\{z\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为该函数的**值域**.

此时，以$x$为横坐标、$y$为纵坐标、$z=f(x,y)$为竖坐标在空间就确定一点$M(x,y,z)$. 当取遍$D$上的一切点时，得到一个空间点集

$$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\},$$

这个点集便是二元函数$z=f(x,y)$的图形（见图 9-2）. 通常二元函数的图形是一空间曲面，函数的定义域$D$便是该曲面在$xOy$面上的投影.

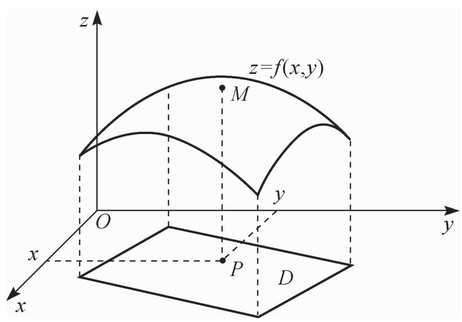



**图 9-2**

例如，二元线形函数$z=ax+by+c$的图形是一个平面. 又如，由方程$x^2+y^2+z^2=a^2$所确定的二元函数$z=f(x,y)$的图形是球心在圆点、半径为$a$的球面，它的定义域是圆形闭区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2\}$. 在$D$的内部任一点$(x,y)$处，函数有两个对应值，一个为$\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，另一个为$-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. 因此，这是多值函数. 把它分成两个单值函数$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$及$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，前者表示上半球面，后者表示下半球面. 以后除了对多元函数另作声明外，总假定所讨论的函数是单值的.

与二元函数的定义类似，可给出$n$元函数的定义.

**定义 2**　设$x_1,x_2,\cdots,x_n,u$是变量，$D$是$\mathbf{R}^n$的一个子集. 如果对$D$中的每一点

$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,按照某种对应法则 $f$,变量 $u$ 总有唯一确定的数值与之对应,则称 $u$ 是定义在 $D$ 上的 ***n* 元函数**,记为

$$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D \text{ 或 } u=f(P),P\in D,$$

$D$ 是该函数的**定义域**.

关于 $n$ 元函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定.如果讨论的是纯数学问题,则往往取使函数的表达式有意义的自变量所确定的点集作为该函数的定义域.例如,函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}$ 的定义域为 $\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$;函数 $u=\sqrt{z}\arccos(x^2+y^2+z^2)$ 的定义域为 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0\}$.

## 四、多元函数的极限

与一元函数的极限概念类似,对于二元函数,也要讨论当自变量 $x\to x_0,y\to y_0$,即点 $P(x,y)$ 无限逼近点 $P_0(x_0,y_0)$(记为 $P\to P_0$ 或 $(x,y)\to(x_0,y_0)$)或 $|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$ 时,函数 $z=f(x,y)$ 的变化趋势,即函数的极限问题.

**定义 3** 设 $f(P)$ 为定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数,点 $P_0$ 为 $D$ 的一个聚点.如果存在一个常数 $A$,对于 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $P\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时,都有

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

成立,则称常数 $A$ 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0).$$

当 $P,P_0$ 分别用坐标 $(x,y),(x_0,y_0)$ 表示时,极限也可记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A((x,y)\to(x_0,y_0)).$$

**例 4** 设 $f(x,y)=xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

**证明** 函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D=\mathbf{R}^2\backslash\{0,0\}$,点 $O(0,0)$ 为 $D$ 的聚点.对函数的自变量作极坐标变换 $x=r\cos\varphi,y=r\sin\varphi$.这时 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于对任何 $\varphi$ 都有 $r\to 0$.由于

$$|f(x,y)-0|=\left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{r^2}{4}|\sin 4\varphi|\leqslant\frac{r^2}{4},$$

因此,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=2\sqrt{\varepsilon}$,当 $0<r=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$,即 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(O,\delta)$ 时,不论 $\varphi$ 取何值都有 $|f(x,y)-0|<\varepsilon$.所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

必须注意的是,$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$ 是指 $P$ 以任何方式趋于 $P_0$,包括沿任何直线,沿

任何曲线趋于$P_0$时，$f(P)$必须趋于同一确定的常数$A$. 只要$P$沿任意两条路线趋于$P_0$时，函数趋于不同的值，就可以断定二元函数在点$P_0$处极限不存在.

**例 5**　讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 当$(x,y)\to(0,0)$时的极限是否存在.

**解**　当动点$(x,y)$沿$x$轴趋于点$(0,0)$时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0;$$

当动点$(x,y)$沿$y$轴趋于点$(0,0)$时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} 0=0;$$

当动点$(x,y)$沿直线$y=kx$趋于点$(0,0)$时，

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,kx)=\frac{k}{1+k^2}.$$

这一结果说明动点沿斜率不同的直线趋于点$(0,0)$时，对应的极限值也不同，因此该函数的极限不存在.

以上关于二元函数的极限概念可相应地推广到$n$元函数上去. 多元函数的极限运算法则与一元函数四则运算法则相似.

**例 6**　求 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

**解**　这里函数$\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$的定义域为$D=\{(x,y)\mid xy\neq 0\}$，$(0,0)$为$D$的聚点. 先分母有理化，再求极限，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

## 五、多元函数的连续性

**定义 4**　设二元函数$f(P)=f(x,y)$的定义域为$D$，$P_0(x_0,y_0)$为$D$的聚点，且$P_0\in D$. 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$**连续**，若函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处不连续，则称函数$f(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$处**间断**.

如果函数$f(x,y)$在$D$的每一点都连续，那么就称$f(x,y)$是$D$上的**连续函数**.

二元函数的连续性概念可相应地推广到$n$元函数上去.

**例 7**　设$f(x,y)=\cos x$，证明$f(x,y)$是$\mathbf{R}^2$上的连续函数.

**证明**　在$\mathbf{R}^2$中任取一点$P_0(x_0,y_0)$. $\forall\varepsilon>0$，由于$\cos x$在$x_0$处连续，故$\exists\delta>$

0,当$|x-x_0|<\delta$时,有

$$|\cos x-\cos x_0|<\varepsilon,$$

以上述$\delta$作$P_0$的$\delta$邻域$U(P_0,\delta)$,则当$P(x,y)\in U(P_0,\delta)$时,

$$|x-x_0|\leqslant|P_0P|<\delta,$$

因此,

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\cos x-\cos x_0|<\varepsilon,$$

即$f(x,y)=\cos x$在点$P_0(x_0,y_0)$连续. 由于$P_0$是$\mathbf{R}^2$内任意一点,所以$f(x,y)$是$\mathbf{R}^2$上的连续函数.

同理可证,$n$元函数$f(x,x_2,\cdots,x_n)=\cos x$在$\mathbf{R}^n$上也连续. 由类似地讨论可知,一元基本初等函数看成二元函数或二元以上的多元函数时,它们在各自的定义区域内都是连续的,所谓**定义区域**是指包含在定义域内的开区域或闭区域.

还可以证明,多元连续函数的和、差、积仍为连续函数,连续函数的商在分母不为零处仍连续;多元连续函数的复合函数也是连续函数.

**定义 5** 由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的,可用一个式子表示的多元函数称为**多元初等函数**.

根据连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性,再利用基本初等函数的连续性,可得出如下结论:

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

利用这个结论,当要求某个多元初等函数在其定义区域内一点的极限时,只要算出函数在该点的函数值即可.

**例 8** 求$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{x+\mathrm{e}^y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

**解** 函数$\dfrac{x+\mathrm{e}^y}{\sqrt{x^2+y^2}}$是多元初等函数,其定义域为$D=\{(x,y)\,|\,x\neq0,y\neq0\}$,$P_0(1,0)$为$D$的内点,故存在$P_0$的某一邻域$U(P_0)\subset D$,而任何邻域都是开区域,所以$U(P_0)$是$f(x,y)$的一个定义区域,因此

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{x+\mathrm{e}^y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1+\mathrm{e}^0}{\sqrt{1^2+0^2}}=2.$$

在有界闭区域$D$上连续的多元函数也有类似于闭区间上一元连续函数的性质. 下面不加证明地列出这些性质.

**定理 1**(有界性与最值定理) 在有界闭区域$D$上的多元连续函数在$D$上必有界,且能取得最大值与最小值.

**定理 2**(介值定理) 在有界闭区域$D$上的多元连续函数必能取得介于最大值和最小值之间的任何值.

**定理 3**（一致连续性定理）　在有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数必定在 $D$ 上一致连续.

## 习题 9-1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集（称为导集）和边界：

(1) $\{(x,y) \mid x^3 \leqslant y < x^2, y \geqslant 0\}$；　　(2) $\{(x,y) \mid 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9\}$；

(3) $\{(x,y) \mid y > x^3\}$；

(4) $\{(x,y) \mid (x-1)^2+y^2 \geqslant 1\} \cap \{(x,y) \mid (x-2)^2+y^2 \leqslant 4\}$.

2. 已知复合函数的表达式，求 $f(x,y)$：

(1) $f(x+y, e^y) = x^2 y$；　　(2) $f(x+y, xy) = x^2+3xy+y^2+5$.

3. 已知 $f(x,y)$，求以下复合函数：

(1) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$，求 $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$；

(2) $f(x,y) = x^y + 2xy$，求 $f(2,-1)$ 和 $f(u+2v, uv)$.

4. 求下列各函数的定义域：

(1) $z = \ln(x+y)$；　　(2) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$；

(3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{y-x^2}}$；　　(4) $u = \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}}$.

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2 e^{xy}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,a)} \left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{\sin\dfrac{x+y}{2}\pi + y^2}{x^2+y}$.

6. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

7. 讨论下列函数在点 $(0,0)$ 处的连续性：

(1) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$

# 第二节　偏　导　数

**引例**　在报纸上经常会看到关于城市大气污染指数 $P$ 的数据,其常用的运算模型为 $P=x^2+2xy+4xy^2$,其中 $x$ 表示单位体积空气中固体污染物的数量,如粉尘;$y$ 表示单位体积空气中气体污染物的数量,如汽车尾气. 那么这些污染物在空气中含量的变化对指数的影响程度如何呢?下面通过偏导数来进行分析.

## 一、偏导数的定义

当考察圆柱体体积函数 $V(r,h)=\pi r^2h$ 时,若底面半径 $r$ 保持不变,体积 $V$ 主要取决于高 $h$ 的取值,也就是说当自变量 $r$ 固定时,$V(r,h)$ 就是关于 $h$ 的一元函数,从而体积 $V$ 关于高 $h$ 的变化率可视为 $V(h)$ 对 $h$ 的导数. 像这样,多元函数中一个自变量发生变化,其余自变量固定,考虑函数对于该自变量的变化率就称为该函数对于这个自变量的偏导数. 偏导数的引入有利于逐一研究多元函数中每个变量对函数的影响.

**定义 1**　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义,当 $y$ 固定在 $y_0$ 而 $x$ 在 $x_0$ 处有增量 $\Delta x$ 时,相应地,函数 $z=f(x,y)$ 有增量(称为函数**对 $x$ 的偏增量**)

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),$$

若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处**对 $x$ 可导**,此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处**对 $x$ 的偏导数**,记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{ 或 }f_x(x_0,y_0),$$

即 $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$.

类似地,当 $x$ 固定在 $x_0$,而 $y$ 处有增量 $\Delta y$ 时,相应地,函数 $z=f(x,y)$ 有增量(称为函数**对 $y$ 的偏增量**)

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

若极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

存在，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处对 $y$ 可导，此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处**对 $y$ 的偏导数**，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{ 或 }f_y(x_0,y_0).$$

**定义 2**　如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内每一点处对 $x$（或对 $y$）的偏导数都存在，那么这个偏导数也是关于 $x,y$ 的二元函数，就称这个函数为 $z=f(x,y)$ 对 $x$（或对 $y$）的**偏导函数**（简称**偏导数**），记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x\text{ 或 }f_x(x,y)\left(\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y\text{ 或 }f_y(x,y)\right).$$

**注**：偏导数的记号 $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}$ 是一个整体的记号，不能看作分子分母之商.

偏导数的概念还可推广到二元以上的函数.

## 二、偏导数的计算方法

由偏导数的定义知，函数对哪个自变量求偏导数，就先把其他变量看作常数，从而变成一元函数的求导问题. 以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 时，只要把 $y$ 暂时看作常量而对 $x$ 求导数；求 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 时，则只要把 $x$ 暂时看作常量而对 $y$ 求导数.

**例 1**　求 $z=x\sin(x+y)$ 的偏导数.

**解**　$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(x+y)+x\cos(x+y),\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos(x+y).$

**例 2**　求 $z=x^2+2xy+4xy^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

**解**　因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2y+4y^2,\frac{\partial z}{\partial y}=2x+8xy$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\times 1+2\times 2+4\times 2^2=22,\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=2\times 1+8\times 1\times 2=18.$$

**例 3**　求 $u=\left(\frac{x}{y}\right)^z$ 的偏导数.

**解**　$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}=\frac{zx^{z-1}}{y^z},$

$\frac{\partial u}{\partial y}=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{zx^z}{y^{z+1}},$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}.$$

## 三、偏导数的几何意义

设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 上的一点. 过 $M_0$ 作平面 $y=y_0$,它与曲面的交线 $\begin{cases}y=y_0,\\z=f(x,y)\end{cases}$ 是在平面 $y=y_0$ 上的一条曲线,故其方程为 $z=f(x,y_0)$,则导数 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$,即偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是该曲线在点 $M_0$ 处的切线 $M_0T_x$ 对 $x$ 轴的斜率(见图 9-3). 同样,偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 的几何意义是平面 $x=x_0$ 与曲面 $z=f(x,y)$ 的交线 $\begin{cases}x=x_0,\\z=f(x,y)\end{cases}$ 在点 $M_0$ 处的切线 $M_0T_y$ 对 $y$ 轴的斜率.

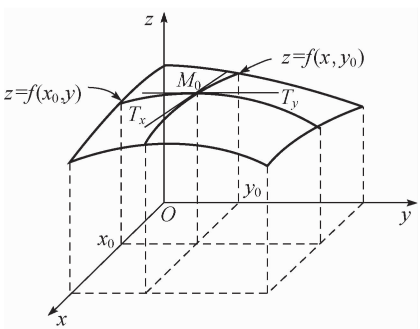



图 9-3

## 四、偏导数与连续性

若一元函数在某点连续,则它在该点未必具有导数,这点在多元函数中显然同样成立,即多元函数在某点连续,则它在该点未必具有偏导数. 例如,$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 为上半圆锥面,显然在点$(0,0)$ 连续,即 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$,但

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0,\\-1, & \Delta x<0,\end{cases}$$

故 $f_x(0,0)$ 不存在. 由 $x,y$ 的对称性,$f_y(0,0)$ 也不存在.

若一元函数在某点具有导数时,则它在该点必定连续. 但对于多元函数来说,即使函数在某点存在对所有自变量的偏导数,也不能保证函数在该点连续. 例如,$f(x,$

$y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 不连续,但却存在偏导数,即

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0}-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y\cdot 0}{\Delta y^2+0}-0}{\Delta y}=0,$$

这是因为偏导数只刻画了函数沿坐标轴方向的变化特征.

## 五、高阶偏导数

**定义 3**　设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内具有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y),\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y),$$

那么在 $D$ 内 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 仍是关于 $x,y$ 的二元函数,如果这两个函数的偏导数也存在,则称它们是函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**. 二元函数的二阶偏导数按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

类似地可定义更高阶的偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**,既有关于 $x$ 又有关于 $y$ 的高阶偏导数称为**混合偏导数**,如 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

**例 4**　设 $z=x^4+y^4-4x^2y^2$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

**解**　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2,$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-8x^2y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}=24y,$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-16xy,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-16xy.$

**例 5**　设 $z=y^x$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$,

**解**　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y,\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y^{x-1}(1 + x\ln y),\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = y^{x-1}(1 + x\ln y).$$

在例 4 和例 5 中,两个二阶混合偏导数都相等,即$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,这是偶然还是必然的呢?不妨再观察一个例子.

**例 6** 设 $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$ 求 $f_{xy}(0,0)$ 和 $f_{yx}(0,0)$.

**解** 因为

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f_x(0,\Delta y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x,\Delta y) - f(0,\Delta y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta x \Delta y \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right] = -\Delta y,$$

所以

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,0 + \Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y - 0}{\Delta y} = -1,$$

同理可求得 $f_{yx}(0,0) = 1$.

显然,此例中 $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$,事实上二阶混合偏导数相等是有条件的.

**定理** 如果函数 $z = f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$在区域$D$内连续,那么在 $D$ 内$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

该定理的结论对 $n$ 元函数的混合偏导数也成立.

**例 7** 设 $f(x,y,z) = xy^2 + yz^2 + zx^2$,求各二阶偏导数及 $f_{zzx}(x,y,z)$.

**解** 因为

$$f_x(x,y,z) = y^2 + 2xz, f_y(x,y,z) = 2xy + z^2, f_z(x,y,z) = 2yz + x^2,$$

于是

$$f_{xx}(x,y,z) = 2z, f_{yy}(x,y,z) = 2x, f_{zz}(x,y,z) = 2y,$$
$$f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = 2y, f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 2x,$$
$$f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 2z, f_{zzx}(x,y,z) = 0.$$

**引例说明** 由例 2 的结果$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 22$,$\left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}} = 18$知,当单位体积空气中固体污染物的数量为 1 个单位,气体污染物的数量为 2 个单位时,固体污染物每增加 1 个单位时,大气污染指数将增大 22 个单位. 同样,当气体污染物的数量增加 1 个单位时,大气污染指数将增大 18 个单位.

## 习题 9-2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　　(2) $z=\sqrt{\ln(xy)}$；

(3) $z=\mathrm{e}^{x+2y}\sin(xy^2)$；　　(4) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$；

(5) $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(6) $z=(1+xy)^y$；

(7) $z=y\displaystyle\int_0^{xy}\mathrm{e}^{1+t^2}\,\mathrm{d}t$；　　(8) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. 设 $f(x,y)=xy^2+(x-2)\ln\dfrac{3x^2+y^2+2}{2y^2+x^2+1}$，求 $f_y(2,y)$ 和 $f_y(2,1)$.

3. 求曲线$\begin{cases}z=\sqrt{1+x^2+y^2},\\ y=1\end{cases}$在$(1,1,\sqrt{3})$处的切线与 $x$ 轴正向所成的倾斜角.

4. 求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=\arcsin(xy)$；　　(2) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

5. (1) 设 $z=x\ln(xy)$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$；

(2) 设 $z=x^3\sin y+y^3\sin x$，求$\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}$；

(3) 设 $z=x\mathrm{e}^{xy}$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}$ 和$\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$.

6. 设 $f(x,y,z)=x^2y^5-y^2z^7+zx^3$，求 $f_{xx}(0,2,0)$，$f_{xz}(2,1,0)$，$f_{yz}(-1,0,0)$ 及 $f_{zzx}(1,2,0)$.

# 第三节　全　微　分

多元函数偏导数实际上相当于一元函数的导数，多元函数对某个自变量的偏导数仅表示因变量相对于该自变量的变化率，而其余自变量视为固定. 但在实际问题中，往往要研究多元函数中各个自变量都发生变化时，因变量的变化率. 这就要求引入新的研究工具，即全微分.

## 一、全微分的定义

定义二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数时，曾给出偏增量的概念，称

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y),f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

分别为函数 $z=f(x,y)$ 在点$(x,y)$处对 $x,y$ 的偏增量,而当自变量 $x,y$ 在点$(x,y)$处均有增量 $\Delta x,\Delta y$ 时,称

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

为函数 $z=f(x,y)$ 在点$(x,y)$处的**全增量**,记为 $\Delta z$.

一般地,$\Delta z$ 的计算比较复杂.对比一元函数的情形,希望用自变量增量 $\Delta x$ 与 $\Delta y$ 的线性函数来近似地代替全增量,于是产生了全微分的概念.

**定义** 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 $A,B$ 是仅与 $x,y$ 有关的常数,$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ **可微分**,而 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的**全微分**,记为 $\mathrm{d}z$,即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

与一元函数类似,自变量的增量等于自变量的微分,即

$$\Delta x=\mathrm{d}x,\Delta y=\mathrm{d}y,$$

于是,函数 $z=f(x,y)$ 的全微分可写为

$$\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y.$$

当函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内每一点都可微分时,则称 $z=f(x,y)$ 在 $D$ 内**可微分**.

根据全微分的定义,若函数 $z=f(x,y)$ 在点$(x,y)$处可微分,则

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho),$$

在上式中令$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$,得

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\Delta z=0,$$

即

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y),$$

所以 $z=f(x,y)$ 在点$(x,y)$处连续.

因此,若函数 $z=f(x,y)$ 在点$(x,y)$处可微分,则 $f(x,y)$ 在点$(x,y)$处连续,即它对应的几何图形必是连续不间断的曲面.

## 二、可微分的条件

下面讨论函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分的必要条件.

**定理 1**（必要条件）　若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，则该函数在点 $P(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

**证明**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分. 于是，对于点 $P$ 的某个邻域的任意一点 $P'(x+\Delta x,y+\Delta y)$，有

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+B\cdot\Delta y+o(\rho),$$

特别当 $\Delta y=0$ 时上式也成立，此时 $\rho=|\Delta x|$，所以

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|),$$

上式两边同时除以 $\Delta x$，再令 $\Delta x\to 0$，就得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=A,$$

从而偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 存在，且等于 $A$.

同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$. 所以 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

**例 1**　讨论函数 $z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性.

**解**　由定义可得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0}}-0}{\Delta x}=0,$$

同理有 $f_y(0,0)=0$.

假设函数在点 $(0,0)$ 可微分，则 $\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$ 应是较 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小，但是由第一节例 5 知，$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 的极限不存在，所以函数在点 $(0,0)$ 处是不可微分的.

对于一元函数来说，函数的可微与可导是等价的，但对于多元函数，由定理 1 及例 1 可知，偏导数存在是可微分的必要条件而不是充分条件.

**定理 2**（充分条件）　若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 连续，则函数在该点可微分.

**证明** 考察函数的全增量

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)\\ &= [f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)]+[f(x, y+\Delta y)-f(x,y)],\end{aligned}$$

在第一个方括号内的表达式,由于$y+\Delta y$不变,所以它是函数$f(x,y+\Delta y)$关于$x$的偏增量;第二个方括号里的表达式则是函数$f(x,y)$关于$y$的偏增量. 于是,对它们分别应用拉格朗日中值定理,得

$$\Delta z = f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y (0<\theta_1,\theta_2<1).$$

又由于函数的偏导数在点$P(x,y)$连续,所以上式可写为

$$\begin{aligned}\Delta z &= [f_x(x,y)+\varepsilon_1]\Delta x + [f_y(x,y)+\varepsilon_2]\Delta y\\ &= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,\end{aligned}$$

其中$\varepsilon_1$为$\Delta x,\Delta y$的函数,且当$\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$时,$\varepsilon_1\to 0$;$\varepsilon_2$为$\Delta y$的函数,且当$\Delta y\to 0$时,$\varepsilon_2\to 0$.

容易看出$\left|\dfrac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\leqslant|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|$,故$\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$是比$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$更高阶的无穷小. 所以$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微.

但同时应该注意到,在函数可微分的条件下,各偏导数未必连续.

**例 2** 讨论函数$z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$P(0,0)$处的可微性与偏导数的连续性.

**解** (1) 可微性.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}=0,$$

由$x,y$的对称性知,$f_y(0,0)=0$.

$$\begin{aligned}&\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\ &=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\ &=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\\ &=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0,\end{aligned}$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$可微分.

（2）偏导数连续性.

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

取点列 $P_n(x_n,y_n)$，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$，$y_n=0$，显然

$$P_n(x_n,y_n)\to(0,0)(n\to\infty),$$

$$f_x(x_n,y_n)=-2\sqrt{2n\pi}\cos 2n\pi\to-\infty(n\to\infty),$$

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$ 不存在，从而 $f_x(x,y)$ 在点(0,0) 不连续. 由 $x,y$ 的对称性，$f_y(x,y)$ 在点(0,0) 也不连续.

以上关于二元函数全微分的定义及微分的必要条件和充分条件，可以完全类似的推广到三元和三元以上的多元函数.

与全微分对应，通常把$\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 称为函数关于 $x$，$y$ 的**偏微分**，由定理 1 可知，二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和，也称二元函数的微分符合**叠加原理**. 叠加原理也适用于二元以上的函数的情形. 例如，如果三元函数 $u=\varphi(x,y,z)$ 可微分，那么它的全微分就等于它的三个偏微分之和，即

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

**例 3**　计算下列函数的全微分：

（1）$z=x^2+y^2$；（2）$u=xe^{yz}+e^{-z}$；（3）$z=y\cos x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{3},1\right)$处的全微分.

**解**　（1）因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$，所以

$$\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y.$$

（2）因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{yz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=xze^{yz}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=xye^{yz}-e^{-z}$，所以

$$\mathrm{d}u=e^{yz}\mathrm{d}x+xze^{yz}\mathrm{d}y+(xye^{yz}-e^{-z})\mathrm{d}z.$$

（3）因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y\sin x$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos x$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=\frac{\pi}{3}\\ y=1}}=-\frac{\sqrt{3}}{2},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=\frac{\pi}{3}\\ y=1}}=\frac{1}{2},$$

于是

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{\substack{x=\frac{\pi}{3}\\ y=1}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\mathrm{d}y.$$

## 习题 9-3

1. 求下列函数的全微分:

(1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$;　　(2) $z=e^x\cos y$;

(3) $z=e^{\frac{y}{x}}$;　　(4) $z=\ln\dfrac{x-y}{x+y}$;

(5) $u=x^{yz}$;　　(6) $u=\cos(xyz)$.

2. 求函数 $z=2x^2+3y^2$ 在点(10,8)处当 $\Delta x=0.2,\Delta y=0.3$ 时的全增量及全微分.

3. 判断二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(x_0,y_0),\\ 0, & (x,y)=(x_0,y_0)\end{cases}$ 在点(0,0)处是否可微分.

# 第四节　多元复合函数的微分法

本节将一元函数微分学中复合函数的微分法推广到多元复合函数的情形.

## 一、多元复合函数的求导法则

下面按照多元复合函数中间变量的不同情形,分三种情形进行讨论.

**1. 复合函数的中间变量均为同一自变量的一元函数的情形**

设函数 $z=f(u,v)$,其中 $u=\varphi(t),v=\psi(t)$,即构成复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$,其变量相互依赖关系如图 9-4 所示.

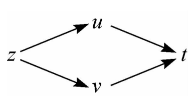



图 9-4

**定理 1**　如果函数 $u=\varphi(t)$ 及 $v=\psi(t)$ 都在点 $t$ 可导,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 $t$ 可导,且有

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}.$$

**证明**　当 $t$ 取得增量 $\Delta t$ 时,$u,v$ 及 $z$ 相应地也取得增量 $\Delta u,\Delta v$ 及 $\Delta z$. 由于 $z=f(u,v)$ 在点 $(u,v)$ 具有连续偏导数,于是函数 $z=f(u,v)$ 在点 $(u,v)$ 可微分,即

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 因此,有

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t},\qquad ①$$

因为当 $\Delta t\to 0$ 时,$\Delta u\to 0,\Delta v\to 0,\frac{\Delta u}{\Delta t}\to\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\frac{\Delta v}{\Delta t}\to\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,又因

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{\Delta t}\right]=0\cdot\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}=0,$$

即当 $\Delta t\to 0$ 时,$\frac{o(\rho)}{\Delta t}\to 0$,所以令 $\Delta t\to 0$,式 ① 两边取极限,得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

从定理 1 中可看到函数最终只依赖于一个变量 $t$,所以对其导数应用 d 的符号,并称上述$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 为**全导数**.

定理 1 可以推广到更多中间变量的情况. 设 $z=f(u,v,w)$,其中 $u=\varphi(t),v=\psi(t),w=\omega(t)$,即构成复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]$,其变量相互依赖关系如图 9-5 所示,有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

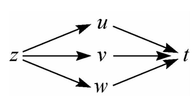



**图 9-5**

**例 1**　设 $z=xe^{\frac{x}{y}},x=\cos t,y=e^{2t}$,求全导数$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

**解**　$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(e^{\frac{x}{y}}+\frac{x}{y}e^{\frac{x}{y}}\right)(-\sin t)+xe^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot 2e^{2t}$$
$$=-xe^{\frac{x}{y}}\left(\frac{\sin t}{x}+\frac{\sin t}{y}+\frac{2xe^{2t}}{y^2}\right).$$

**例 2**　设有一圆柱体,它的底半径以 0.1 cm/s 的速率增大,而高度以 0.2 cm/s 的速率在减少,试求当底半径为 100 cm,高为 120 cm 时. 求圆柱体体积的变化率.

**解**　设圆柱体的底半径为 $R$,高为 $h$,则体积为 $V=\pi R^2h$,其体积变化率为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial R}\cdot\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial V}{\partial h}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=2\pi Rh\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+\pi R^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$

将 $R=100\ \mathrm{cm}$,$h=120\ \mathrm{cm}$,$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=0.1\ \mathrm{cm/s}$,$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-0.2\ \mathrm{cm/s}$ 代入上式,得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=\pi R\left(2h\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}+R\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)=\pi\times100\times(2\times120\times0.1-100\times0.2)\\&=400\pi\ \mathrm{cm^3/s}.\end{aligned}$$

**2. 复合函数的中间变量均为多元函数的情形**

定理 1 还可推广到中间变量不是一元函数而是多元函数的情形. 设函数 $z=f(u,v)$,其中 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$,即构成复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$,其变量相互依赖关系如图 9-6 所示.

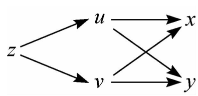


**图 9-6**

**定理 2** 如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点 $(x,y)$ 具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 $(x,y)$ 的两个偏导数存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

本定理的证明方法与定理 1 类似,如对 $x$ 求偏导时,只要注意变量 $y$ 是固定的,实质上就是定理 1 的情形,只是相应地把导数符号换成偏导数符号.

**例 3** 已知 $z=u\mathrm{e}^{v}+v\mathrm{e}^{-u}$,$u=xy$,$v=\dfrac{x}{y}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**解** 
$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=(\mathrm{e}^{v}-v\mathrm{e}^{-u})\cdot y+(u\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-u})\cdot\frac{1}{y}\\&=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\cdot y-\frac{x}{y}\mathrm{e}^{-xy}\cdot y+xy\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}+\mathrm{e}^{-xy}\cdot\frac{1}{y}\\&=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(x+y)+\mathrm{e}^{-xy}\left(\frac{1}{y}-x\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\&=(\mathrm{e}^{v}-v\mathrm{e}^{-u})\cdot x+(u\mathrm{e}^{v}+\mathrm{e}^{-u})\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\\&=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\cdot x-\frac{x}{y}\mathrm{e}^{-xy}x-xy\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{y^2}-\mathrm{e}^{-xy}\cdot\frac{x}{y^2}\end{aligned}$$

$$= e^{\frac{x}{y}}\left(x-\frac{x^2}{y}\right)-e^{-xy}\left(\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^2}\right).$$

类似地,设 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$ 及 $w=\omega(x,y)$ 都在点$(x,y)$具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数,函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点$(u,v,w)$具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y),\omega(x,y)]$(变量相互依赖关系见图 9-7)在点$(x,y)$的两个偏导数都存在,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}.$$

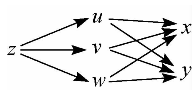



**图 9-7**

### 3. 复合函数的中间变量既有一元函数,又有多元函数的情形

**定理 3**　如果函数 $u=\varphi(x,y)$ 在点$(x,y)$具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数,函数 $v=\psi(y)$ 在点 $y$ 可导,函数 $z=f(u,v)$ 在对应点$(u,v)$具有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$(变量相互依赖关系见图 9-8)在点$(x,y)$的两个偏导数存在,且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

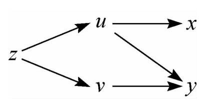



**图 9-8**

实际上该情形是第 2 种情形的特例.

**例 4**　设 $z=u\arctan(uv)$,$u=xe^y$,$v=y^2$,求 $z$ 关于 $x$,$y$ 的偏导数.

**解**　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=\left[\arctan(uv)+\frac{uv}{1+u^2v^2}\right]\cdot e^y=e^y\left[\arctan(xy^2e^y)+\frac{xy^2e^y}{1+x^2y^4e^{2y}}\right]$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\left[\arctan(uv)+\frac{uv}{1+u^2v^2}\right]\cdot xe^y+\frac{u^2}{1+u^2v^2}\cdot 2y$$

$$=xe^y\left[\arctan(xy^2e^y)+\frac{xy^2e^y}{1+x^2y^4e^{2y}}\right]+\frac{2x^2ye^{2y}}{1+x^2y^4e^{2y}}.$$

设 $u=\varphi(x,y)$ 在点$(x,y)$具有偏导数,$z=f(u,x)$ 在相应点$(u,x)$处有连续偏导数,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x]$ 在点$(x,y)$处有偏导数,且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y},$$

实际上可看作第 3 种情形中当 $v=x$ 的特殊情况.

**注**:这里$\dfrac{\partial z}{\partial x}$是表示在复合函数 $z=f[\varphi(x,y),x]$ 中把 $y$ 看作常量求得的 $z$ 对 $x$ 的偏导数,$\dfrac{\partial f}{\partial x}$是表示在 $z=f(u,x)$ 中把 $u$ 看作常量求得的 $z$ 对 $x$ 的偏导数. 所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}$与$\dfrac{\partial f}{\partial x}$的意义不同.

**例 5** 设 $z=f(u,x)=\arcsin(x+u)$,其中 $u=\sin(xy)$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**解** $$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\\&=\frac{y\cos(xy)}{\sqrt{1-(x+u)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-(x+u)^2}}=\frac{y\cos(xy)+1}{\sqrt{1-[x+\sin(xy)]^2}},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x\cos(xy)}{\sqrt{1-(x+u)^2}}=\frac{x\cos(xy)}{\sqrt{1-[x+\sin(xy)]^2}}.$$

## 二、多元复合函数的高阶偏导数

计算多元复合函数的高阶偏导数,只要重复运用前面的求导法则即可.

为表达简便起见,引入记号 $f'_1,f'_2,f''_{12}$等,这里下标"1"表示对第一个变量 $u$ 求偏导数,下标"2"表示对第二个变量 $v$ 求偏导数,即

$$f'_1=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u},f'_2=\frac{\partial f(u,v)}{\partial v},f''_{12}=\frac{\partial^2 f(u,v)}{\partial u\partial v},$$

同理可规定 $f''_{11},f''_{22}$等.

**例 6** 设 $z=f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$,其中 $f$ 具有二阶连续偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**解** 令 $u=xy,v=\dfrac{y}{x}$,则 $z=f(u,v)$. 根据复合函数的求导法则,有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=yf'_1-\frac{y}{x^2}f'_2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=xf'_1+\frac{1}{x}f'_2.$$

因为 $f'_1$及 $f'_2$仍是复合函数,故由复合函数求导法则,有

$$\frac{\partial f'_1}{\partial y}=\frac{\partial f'_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f'_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=xf''_{11}+\frac{1}{x}f''_{12},$$

$$\frac{\partial f'_2}{\partial y}=\frac{\partial f'_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f'_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=xf''_{21}+\frac{1}{x}f''_{22},$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(yf'_1-\frac{y}{x^2}f'_2\right)=f'_1+y\cdot\frac{\partial f'_1}{\partial y}-\frac{1}{x^2}f'_2-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial f'_2}{\partial y}$$

$$=f'_1+y\cdot\left(xf''_{11}+\frac{1}{x}f''_{12}\right)-\frac{1}{x^2}f'_2-\frac{y}{x^2}\cdot\left(xf''_{21}+\frac{1}{x}f''_{22}\right)$$

$$=f'_1+xyf''_{11}-\frac{1}{x^2}f'_2-\frac{y}{x^3}f''_{22},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xf'_1+\frac{1}{x}f'_2\right)=x\cdot\frac{\partial f'_1}{\partial y}+\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f'_2}{\partial y}$$

$$=x\cdot\left(xf''_{11}+\frac{1}{x}f''_{12}\right)+\frac{1}{x}\cdot\left(xf''_{21}+\frac{1}{x}f''_{22}\right)=x^2f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{x^2}f''_{22}.$$

## 三、多元复合函数全微分

设 $z=f(u,v)$ 具有连续偏导数，则有全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

若 $z=f(u,v)$ 中的 $u,v$ 为中间变量，即 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，而且它们也具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y, \tag{②}$$

由定理 2 可知其中的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，于是式 ② 化为

$$\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

由此可见，无论 $z$ 是自变量 $u,v$ 的函数还是中间变量 $u,v$ 的函数，它的全微分形式是一样的. 这个性质称为**全微分形式不变性**.

**例 7**　设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，$u=x-y$，$v=x+y$，利用全微分形式不变性求全微分.

**解**　$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\mathrm{e}^u\sin v(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)+\mathrm{e}^u\cos v(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$

$$=(\mathrm{e}^u\sin v+\mathrm{e}^u\cos v)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^u\cos v-\mathrm{e}^u\sin v)\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{e}^{x-y}[\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x-y}[\cos(x+y)-\sin(x+y)]\mathrm{d}y.$$

## 习题 9-4

1. 求下列函数的全导数：

(1) 设 $z=uv+\sin t$，其中 $u=\mathrm{e}^t$，$v=\cos t$；

(2) 设 $z=u^2v$,其中 $u=\cos x, v=\sin x$;

(3) 设 $z=\arctan(xy)$,其中 $y=e^x$.

2. 求下列函数的偏导数:

(1) 设 $z=u^2+v^2, u=x+y, v=x-y$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $u=e^{x^2+y^2+z^2}, z=x^2\sin y$,求$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial u}{\partial y}$;

(3) 设 $z=e^x\sin y, x=2st, y=t+s^2$,求$\frac{\partial z}{\partial s},\frac{\partial z}{\partial t}$.

3. 求下列函数的一阶偏导数(其中 $f$ 具有一阶连续偏导数):

(1) 设 $z=f(x^2-y^2,e^{xy})$,求$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 设 $u=f(x,xy,xyz)$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$和$\frac{\partial u}{\partial z}$.

4. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$(其中 $f$ 具有二阶连续偏导数):

(1) $z=f(xy,y)$;　　(2) $z=f(xy^2,x^2y)$.

5. 设 $z=f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$,$f$ 可微分,求 $dz$.

6. 设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1, g(x,y)=f\left[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$,求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

# 第五节　隐函数的微分法

**引例**　在用数学方法探讨物理问题时,往往会发现物理公式中并没有明显的自变量和因变量,如气体的状态方程为 $pV=RT$,其中 $p$ 为压强、$V$ 为体积、$T$ 为绝对温度、$R$ 为常数.像这样的公式,从数学角度上讲,就是隐函数.那么隐函数中变量的变化率如何分析呢?以气体内能模型为例,在气体可逆变化中,气体的内能 $E$ 与熵 $S$ 满足 $dS=\frac{1}{T}dE+\frac{p}{T}dV$,如果结合状态方程 $pV=RT$,不妨讨论一下气体的内能与体积和温度哪个关系更大.

## 一、一个方程的情形

第二章已经给出了隐函数 $F(x,y)=0$ 不经显化直接由方程求导数的方法,如

对$(x^2+1)^2+y^2=0$,就可以直接求得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x(x^2+1)}{y}$,但进一步分析就会发现,这个隐函数显然是不存在的.由此可见,在求导之前,应首先确认隐函数的存在性.下面来探讨隐函数存在定理,并根据多元复合函数的求导法则来导出隐函数的导数公式,本节中的定理不作严格证明,仅给出推导过程.

**定理 1**(一元函数存在定理)　设函数$F(x,y)$满足如下条件:

(1) 在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数.

(2) $F(x_0,y_0)=0,F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则方程$F(x,y)=0$在点$(x_0,y_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数$y=f(x)$,且满足条件$y_0=f(x_0)$,并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

**定理推导**　将$y=f(x)$代入$F(x,y)=0$,得恒等式$F[x,f(x)]\equiv 0$,对等式两边再关于$x$求导,得

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0.$$

又$F_y$连续,且$F_y(x_0,y_0)\neq 0$,所以存在$(x_0,y_0)$的一个邻域,在这个邻域内$F_y\neq 0$,因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

**例 1**　求由方程$x^y=y^x$所确定的隐函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

**解**　设$F(x,y)=x^y-y^x$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y},$$

由$F_x=yx^{y-1}-y^x\ln y,F_y=x^y\ln x-xy^{x-1}$,故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x-xy^{x-1}}.$$

隐函数存在定理还可以推广到多元函数.

**定理 2**(多元函数存在定理)　设函数$F(x,y,z)$满足如下条件:

(1) 在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数.

(2) $F(x_0,y_0,z_0)=0,F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则方程$F(x,y,z)=0$在点$(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$,它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$,并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

**定理推导** 将$z=f(x,y)$代入$F(x,y,z)=0$,得$F[x,y,f(x,y)]\equiv 0$,将等式两端分别对$x$和$y$求导,应用复合函数求导法则得

$$F_x+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0, F_y+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

因为$F_z$连续,且$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,所以存在点$(x_0,y_0,z_0)$的一个邻域,在这个邻域内$F_z\neq 0$,于是得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

**例 2** 设$\mathrm{e}^z-z+xy=3$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

**解** 设$F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-z+xy-3$,则

$$F_x=y, F_z=\mathrm{e}^z-1,$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{y}{\mathrm{e}^z-1}=\frac{y}{1-\mathrm{e}^z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-y\left(-\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(1-\mathrm{e}^z)^2}=\frac{y\mathrm{e}^z\cdot\frac{y}{1-\mathrm{e}^z}}{(1-\mathrm{e}^z)^2}=\frac{y^2\mathrm{e}^z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}.$$

**例 3** 设$z=z(x,y)$是由方程$f(y-x,yz)=0$所确定的隐函数,其中$f$有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

**解** 方程两边同时对$x$求偏导,得

$$f'_1\cdot(-1)+f'_2\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

即$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f'_1}{yf'_2}$,再一次对$x$求偏导得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\left[f''_{11}(-1)+f''_{12}y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right]yf'_2-f'_1\cdot\left[yf''_{21}(-1)+yf''_{22}\cdot y\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{(yf'_2)^2},$$

整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-(f'_2)^2f''_{11}+2f'_1f''_{12}f'_2-(f'_1)^2f''_{22}}{y(f'_2)^3}.$$

## 二、方程组的情形

在满足条件时,一个方程组$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$可以确定一对二元函数. 例如,由方程$xu-yv=0,yu+xv=1$可以整理出两个二元函数$u=\frac{y}{x^2+y^2},v=$

$\dfrac{x}{x^2+y^2}$，据此可求其偏导数. 但实际上，更多的情况是无法显化出对应的函数 $u,v$，那么根据原方程组直接求 $u,v$ 的偏导数就成为必要.

**定理 3**　设 $F(x,y,u,v)$，$G(x,y,u,v)$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数. 又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于零，则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

**定理推导**　设方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 确定一对具有连续偏导数的二元函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，则

$$\begin{cases}F[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0,\\ G[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0,\end{cases}$$

将恒等式两端分别对 $x$（或对 $y$）求导，应用复合函数求导法则得

$$\begin{cases}F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}\quad \left(\text{或}\begin{cases}F_y+F_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ G_y+G_u\dfrac{\partial u}{\partial y}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}\right),$$

这是关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$（或 $\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$）的线性方程组. 由假设可知，在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一个邻域内，系数行列式

$$J=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0,$$

从而解上述线性方程组,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\left(\text{或}\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\right).$$

**例 4** 设$\begin{cases}x=e^u+u\sin v,\\ y=e^u-u\cos v,\end{cases}$求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

**解** 下面直接利用定理 3 的结论来求解. 当然也可依照推导定理 3 的方法来求解.

设 $F(x,y,u,v)=x-e^u-u\sin v,G(x,y,u,v)=y-e^u+u\cos v$,则

$$F_x=1,F_y=0,F_u=-e^u-\sin v,F_v=-u\cos v,$$
$$G_x=0,G_y=1,G_u=-e^u+\cos v,G_v=-u\sin v.$$

在$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-e^u-\sin v & -u\cos v\\ -e^u+\cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=ue^u(\sin v-\cos v)+u\neq 0$的条件下,有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}1 & -u\cos v\\ 0 & -u\sin v\end{vmatrix}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}0 & -u\cos v\\ 1 & -u\sin v\end{vmatrix}=\frac{-\cos v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-e^u-\sin v & 1\\ -e^u+\cos v & 0\end{vmatrix}=\frac{-e^u+\cos v}{ue^u(\sin v-\cos v)+u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-e^u-\sin v & 0\\ -e^u+\cos v & 1\end{vmatrix}=\frac{e^u+\sin v}{ue^u(\sin v-\cos v)+u}.$$

**例 5** 设函数 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 在点 $(u,v)$ 的某一邻域内连续且有连续偏导数,又$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$,证明方程组$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$在点 $(x,y,u,v)$ 的某一邻域内唯一确定一组连续且有连续偏导数的反函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$,并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

**证明** 将方程组$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$改写成如下形式

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)\equiv x-x(u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)\equiv y-y(u,v)=0.\end{cases}$$

按假设

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0,$$

由定理 3 知,方程组$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$在点$(x,y,u,v)$的某一邻域内唯一确定一组连续且有连续偏导数的函数

$$u=u(x,y),v=v(x,y).$$

将反函数 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 代回方程组$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\end{cases}$得

$$\begin{cases}x\equiv x[u(x,y),v(x,y)],\\ y\equiv y[u(x,y),v(x,y)],\end{cases}$$

将上述恒等式两边分别对 $x$ 求偏导数,得

$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

这是关于$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$的线性方程组,由于 $J\neq 0$,故可解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

同理,可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

**引例说明**　为方便起见,取 $V,T$ 为自变量,于是 $S=S(V,T),E=E(V,T)$. 因此有

$$\mathrm{d}S=\frac{\partial S}{\partial V}\mathrm{d}V+\frac{\partial S}{\partial T}\mathrm{d}T,\mathrm{d}E=\frac{\partial E}{\partial V}\mathrm{d}V+\frac{\partial E}{\partial T}\mathrm{d}T,$$

将上式代入 $\mathrm{d}S=\frac{1}{T}\mathrm{d}E+\frac{p}{T}\mathrm{d}V$,得

$$\frac{\partial S}{\partial V}\mathrm{d}V+\frac{\partial S}{\partial T}\mathrm{d}T=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\mathrm{d}V+\frac{\partial E}{\partial T}\mathrm{d}T\right)+\frac{p}{T}\mathrm{d}V,$$

再由状态方程$\frac{p}{T}=\frac{R}{V}$整理可得

$$\frac{\partial S}{\partial V}=\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V}+\frac{R}{V},\frac{\partial S}{\partial T}=\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T},$$

又由$\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial T}=\frac{\partial^2 S}{\partial T\partial V}$可得

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial V}+\frac{R}{V}\right)=\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial E}{\partial T}\right),$$

化简得$-\frac{1}{T^2}\frac{\partial E}{\partial V}=0$,即$\frac{\partial E}{\partial V}=0$.

此结果表明,气体的内能仅是温度的函数,与体积无关.

## 习题 9-5

1. 求由方程$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$所确定的隐函数$z=f(x,y)$的一阶偏导数$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 求由方程$x^2+y^2-1=0$确定的隐函数$y=f(x)$一阶与二阶导数在$x=0$的值.

3. 求由方程$x^3+y^3+z^3=2xyz-1$所确定的隐函数$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$和$\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设$x^2+y^2+z^2-4z=0$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

5. 设$u=f(x,y,z)$有连续的一阶偏导数,又函数$y=y(x)$及$z=z(x)$分别由$e^{xy}-xy=2$和$e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$确定,求$\frac{du}{dx}$.

6. 设$u=f(x,y,z)$有连续偏导数,$z=z(x,y)$由方程$xe^x-ye^y=ze^z$所确定,求$du$.

7. 设$xu-yv=0$,$yu+xv=1$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$.

8. 设$x=x(y,z)$,$y=y(x,z)$,$z=z(x,y)$都是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的具有连续偏导数的函数,证明$\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

# 第六节　多元函数微分学在几何中的应用

## 一、空间曲线的切线与法平面

### 1. 曲线方程为参数方程形式

讨论由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta \\ z=\omega(t), \end{cases} \tag{①}$$

表示的空间曲线 $\Gamma$ 上某点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线和法平面方程，这里 $x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=\psi(t_0)$，$z_0=\omega(t_0)$，$\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta$，并假设式 ① 中的三个函数在 $t_0$ 处可导，且 $\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 不都为零.

在曲线 $\Gamma$ 上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 附近选取一点 $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$，于是连结 $\Gamma$ 上点 $P_0$ 与 $P$ 的割线(见图 9-9) 方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z},$$

其中 $\Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)$，$\Delta y=\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)$，$\Delta z=\omega(t_0+\Delta t)-\omega(t_0)$. 上式各分母除以 $\Delta t$，得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，$P \to P_0$，且 $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \varphi'(t_0)$，$\frac{\Delta y}{\Delta t} \to \psi'(t_0)$，$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to \omega'(t_0)$. 最初假定 $\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 不都为零，若 $\varphi'(t_0)$，$\psi'(t_0)$，$\omega'(t_0)$ 全不为零即得曲线在点 $P_0$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \tag{②}$$

若个别为零，则应按空间解析几何有关直线的对称式方程的说明来理解，如 $\varphi'(t_0)=0$，则相当于$\begin{cases} \dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}, \\ x=x_0. \end{cases}$

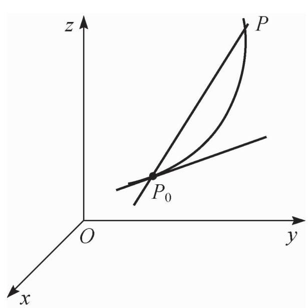



**图 9-9**

切线的方向向量称为**曲线的切向量**.由切线方程②可知,向量

$$\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$$

就是曲线$\Gamma$在点$P_0$处的一个切向量.

过点$P_0$而与切线垂直的平面称为曲线$\Gamma$在点$P_0$处的**法平面**.显然法平面是通过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$且以曲线的切向量$\boldsymbol{T}$为法向量的平面.因此法平面的方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0. \tag{③}$$

**例 1** 求$x=\dfrac{t}{1+t},y=\dfrac{1+t}{t},z=t^2$在$t=1$时的切线方程和法平面方程.

**解** 由已知可得切点坐标为$\left(\dfrac{1}{2},2,1\right)$.又由

$$x'_t=\frac{1}{(1+t)^2},y'_t=-\frac{1}{t^2},z'_t=2t,$$

可得切线的方向向量为$\left(\dfrac{1}{4},-1,2\right)$,于是切线方程为

$$\frac{x-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{4}}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2},$$

法平面方程为

$$\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)-(y-2)+2(z-1)=0,$$

即$2x-8y+16z-1=0$.

**2.曲线方程为一般方程形式**

更多的情况下,曲线$\Gamma$是以一般方程形式给出的.设空间曲线$\Gamma$的方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{④}$$

$P_0(x_0,y_0,z_0)$是曲线$\Gamma$上的一个点,又设函数$F,G$均有对各个变量的连续偏导数,且

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}\neq 0,$$

这时由隐函数存在定理可知,方程组在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内确定了一组函数

$$y=\varphi(x),z=\psi(x), \tag{⑤}$$

使得$y_0=\varphi(x_0),z_0=\psi(x_0)$,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)=\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\psi'(x)=\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}},$$

由于在点 $P_0$ 的某一邻域内，方程组 ④ 与函数组 ⑤ 表示同一空间曲线，因此，以 $x$ 为参数时，得到点 $P_0$ 某邻域内曲线 $\Gamma$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \varphi(x), \\ z = \psi(x). \end{cases}$$

由式 ② 得曲线在 $P_0$ 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\varphi'(x_0)} = \frac{z - z_0}{\psi'(x_0)},$$

即

$$\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}}, \tag{⑥}$$

按式 ③ 得曲线在 $P_0$ 处的法平面方程为

$$(x - x_0) + \varphi'(x_0)(y - y_0) + \psi'(x_0)(z - z_0) = 0,$$

即

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}(y - y_0) + \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}(z - z_0) = 0. \tag{⑦}$$

同样的，当$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0} = 0$ 而$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}$，$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}$ 中至少有一个不等于零时，可得同样的结果.

**例 2**　求由 $x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0, 2x - 3y + 5z - 4 = 0$ 确定的曲线在点$(1,1,1)$处的切线及法平面方程.

**解**　直接利用公式 ⑥ 和 ⑦ 来解. 因为

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 10y + 6z, \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} 2z & 2x - 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4z - 10x + 15,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x - 3 & 2y \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6x + 9 - 4y,$$

因此

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{(1,1,1)} = 16, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{(1,1,1)} = 9, \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{(1,1,1)} = -1,$$

故所求曲线在$(1,1,1)$处的切线方程为

$$\frac{x - 1}{16} = \frac{y - 1}{9} = \frac{z - 1}{-1},$$

法平面方程为

$$16(x - 1) + 9(y - 1) - (z - 1) = 0,$$

即 $16x+9y-z-24=0$.

## 二、曲面的切平面与法线

若曲面上过点 $P_0$ 的任一曲线的切线都在同一平面上,则称这平面为曲面在点 $P_0$ 的**切平面**. 过点 $P_0$ 而与切平面垂直的直线称为曲面在 $P_0$ 的**法线**. 下面求曲线上一点处切平面和法线的方程. 以下分别就所给曲面方程的两种形式来分析.

### 1. 隐式方程 $F(x,y,z)=0$

设曲面 $\Sigma$ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出. 为确定曲面 $\Sigma$ 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面,先在曲面 $\Sigma$ 上,通过点 $P$ 任意引一条曲线 $\Gamma$(见图 9-10),假定 $\Gamma$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t), \end{cases}$$

且设 $t=t_0$ 对应于点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,并设 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0$ 处有连续偏导数且不同时为零,即 $\Gamma$ 在点 $P_0$ 处的切向量 $\boldsymbol{T}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$ 不为零.

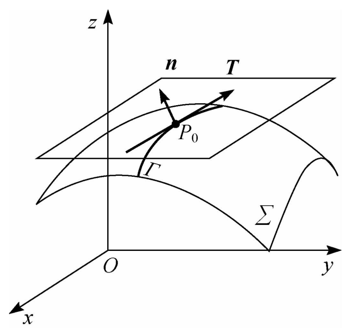



图 9-10

由于曲线 $\Gamma$ 在曲面 $\Sigma$ 上,所以有恒等式 $F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\equiv 0$. 又由于 $F(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处有连续偏导数,且 $\varphi'(t_0)$,$\psi'(t_0)$ 和 $\omega'(t_0)$ 存在,所以恒等式两边对 $t$ 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\Big|_{t=t_0}=0,$$

即

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0.$$

将上式写成向量的点积形式为

$$(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))\cdot\boldsymbol{T}=0,$$

说明向量 $\boldsymbol{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$是与$\Sigma$上过点$P_0$的曲线$\Gamma$的切线垂直的向量.因为曲线$\Gamma$是曲面上通过点$P_0$的任意一条曲线,所以在曲面上过点$P_0$的所有曲线的切线都在同一平面上,故此平面就是曲面在点$P_0$的切平面.该切平面通过点$P_0$,且以$\boldsymbol{n}$为它的法向量.因此,切平面的方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

曲面$\Sigma$在点$P_0$处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

**例 3**　求椭球面$x^2+2y^2+z^2=1$上平行于平面$x-3y+z+9=0$的切平面和法线方程.

**解**　设$F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2-1$,则

$$F_x(x,y,z)=2x,F_y=4y,F_z=2z,$$

于是过椭球面上任一点$M(x,y,z)$的切平面的法向量为$\boldsymbol{n}=(2x,4y,2z)$.平面$x-3y+z+9=0$的法向量为$\boldsymbol{n}'=(1,-3,1)$.依题意有$\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{n}'$,则有

$$(2x,4y,2z)=\lambda(1,-3,1)=(\lambda,-3\lambda,\lambda),$$

即$x=\frac{1}{2}\lambda,y=-\frac{3}{4}\lambda,z=\frac{1}{2}\lambda$.

又由点$M(x,y,z)$在椭球面上,故有

$$\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2+2\left(-\frac{3}{4}\lambda\right)^2+\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2=1,$$

解得$\lambda=\pm2\sqrt{\frac{2}{13}}$,故切点为$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{13}},\mp\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{13}},\pm\sqrt{\frac{2}{13}}\right)$,切平面方程为

$$\left(x\mp\sqrt{\frac{2}{13}}\right)-3\left(y\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{13}}\right)+\left(z\mp\sqrt{\frac{2}{13}}\right)=0,$$

即$x-3y+z\mp\sqrt{\frac{13}{2}}=0$.

法线方程为

$$\frac{x\mp\sqrt{\frac{2}{13}}}{1}=-\frac{y\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{13}}}{3}=\frac{z\mp\sqrt{\frac{2}{13}}}{1}.$$

**2. 显式方程 $z=f(x,y)$**

由多元函数定义知,二元函数$z=f(x,y)$的图形就是一张曲面,反之,也把二元函数$z=f(x,y)$称为曲面的显式方程.要求此形式下的曲面的切平面和法线方程,事实上,只需将其化为隐式方程即可.

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$,可见 $z=f(x,y)$ 等价于 $F(x,y,z)=0$,而且有

$$F_x(x,y,z)=f_x(x,y),F_y(x,y,z)=f_y(x,y),F_z(x,y,z)=-1,$$

于是,只需函数 $f(x,y)$ 的偏导数在点$(x_0,y_0)$连续,就可得曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1).$$

已知 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1)$,于是法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1},$$

切平面方程为

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

它又可写成

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

其右端恰好是函数 $z=f(x,y)$ 在点$(x_0,y_0)$的全微分,而左端是切平面上点的竖坐标的增量.因此,函数 $z=f(x,y)$ 在点$(x_0,y_0)$的全微分,在几何上表示曲面 $z=f(x,y)$ 在点$(x_0,y_0,z_0)$处的切平面上点的竖坐标的增量.这就是二元函数全微分的几何意义.

若用$\alpha,\beta,\gamma$表示曲面的法向量的方向角,并假定法向量的方向是向上的,即使其与 $z$ 轴的正向所成的角 $\gamma$ 为锐角,则可得法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-f_x(x_0,y_0)}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}},$$

$$\cos\beta=\frac{-f_y(x_0,y_0)}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)}}.$$

**例 4** 试求抛物面 $z=ax^2+by^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面与法线方程.

**解** 设 $f(x,y)=ax^2+by^2$,则

$$f_x(x_0,y_0)=2ax_0,f_y(x_0,y_0)=2by_0,$$

于是,过 $M$ 的切平面方程为

$$z-z_0=2ax_0(x-x_0)+2by_0(y-y_0).$$

又因为 $z_0=ax_0^2+by_0^2$,上式可简化为

$$z+z_0=2ax_0x+2by_0y,$$

过点 $M$ 的法线方程是

$$\frac{x-x_0}{2ax_0}=\frac{y-y_0}{2by_0}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

## 习题 9-6

1. 求曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在点$(1,1,1)$处的法平面及切线方程.

2. 求曲线$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=6\end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的法平面及切线方程.

3. 求曲面 $z=x^2+y^2-1$ 在点$(2,1,4)$的切平面与法线方程.

4. 设直线$L$:$\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0\end{cases}$在平面$\pi$上,而平面$\pi$与曲面$z=x^2+y^2$相切于点$(1,-2,5)$,求$a,b$的值.

5. 求曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

6. 求曲线$\Gamma$:$x=\int_0^t e^u\cos u\,du, y=2\sin t+\cos t, z=1+e^{3t}$ 在$t=0$处的法平面和切线方程.

# 第七节　方向导数与梯度

**引例**　鲨鱼在海洋里发现血腥味时,总能立即向气味最浓的方向连续前进,但结果表明它前进的路线从不是直线,这是什么原因呢?在了解梯度的概念之后,再来尝试着解释这种现象.

## 一、数量场与向量场的概念

场是物理学中最重要的概念之一. 已知磁铁周围有磁场,电荷周围有电场,而它周围区域内点随位置不同,场强也随之变化. 为了以量化的形式描述场的特征,将引入场函数的概念.

若对于空间区域$G$内的任一点$M$,都有一个确定的数量$f(M)$与之对应,则称在这空间区域$G$内确定了一个**数量场**. 一个数量场可由一个数量函数$f(M)$来确定. 像温度场、密度场这样与方向无关的量所构成的场都是数量场.

若对于空间区域$G$内的任一点$M$,都有一个确定的向量$\boldsymbol{F}(M)$与之对应,则称在这空间区域$G$内确定了一个**向量场**. 一个向量场可用一个向量函数$\boldsymbol{F}(M)$来确

定,即

$$\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k},$$

其中 $P(M),Q(M),R(M)$ 是点 $M$ 的数量函数.像静电场,速度场这样与方向有关的量所构成的场都是向量场.

本节所涉及的梯度,以及后面即将学习到的散度、旋度都属于场的概念.

## 二、方向导数

已知偏导数所反映的是函数沿坐标轴方向的变化率,但在实际应用中这显然是不够的,如在热传导问题中,对于温度场,就需要研究它对应的数量函数 $f(M)$ 在各个方向上的变化率,所以下面讨论函数在一点 $P$ 沿任一指定方向的变化率.

**定义1** 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义,$l$ 为从点 $P_0$ 出发的射线,$P(x,y)$ 为 $l$ 上且含于 $U(P_0)$ 内的任一点,以 $\rho$ 表示 $P,P_0$ 两点间的距离.若极限 $\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{f(P)-f(P_0)}{\rho}$ 存在,则称这极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0$ 沿方向 $l$ 的**方向导数**,记为 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$.

函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 处沿方向 $l$ 的方向导数就是 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 处沿方向 $l$ 的变化率.函数的偏导数反映了 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 处沿坐标轴方向的变化率,所以函数的偏导数相当于特定指向的方向导数.容易看出,若 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 存在关于 $x$(或 $y$)的偏导数,则 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 沿 $x$(或 $y$)轴正向的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\left(\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_y(x_0,y_0)\right);$$

当 $l$ 的方向为 $x$(或 $y$)轴的负方向时,有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=-f_x(x_0,y_0)\left(\text{或}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=-f_y(x_0,y_0)\right).$$

沿任一方向的方向导数与偏导数的关系由下述定理给出.

**定理** 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,那么函数在该点沿任一方向 $l$ 的方向导数都存在,且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是方向 $l$ 的方向余弦.

**证明** 设 $l$ 上的另一点 $P$ 的坐标为 $P(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$.因为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,所以

$$f(P)-f(P_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 为线段 $PP_0$ 的长度.

由题意,$l$ 与 $x$ 轴,$y$ 轴正向的夹角分别为 $\alpha,\beta$,故 $\Delta x = x - x_0 = \rho\cos\alpha$,$\Delta y = y - y_0 = \rho\cos\beta$(见图 9-11),于是

$$f(P) - f(P_0) = f_x(x_0, y_0)\rho\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\rho\cos\beta + o(\rho),$$

两边同除以 $\rho$ 并取极限,得

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} &= \lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{f_x(x_0,y_0)\rho\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\rho\cos\beta + o(\rho)}{\rho}\\ &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.\end{aligned}$$

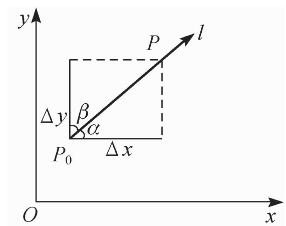



**图 9-11**

**例 1**　求函数 $z = 1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$ 在点 $\left(\frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿向量 $\boldsymbol{l} = (3,4)$ 方向的方向导数.

**解**　易知,与向量 $\boldsymbol{l}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{e}_l = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$,因此,向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$,$\cos\beta = \frac{4}{5}$.

又由于

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = -\left.\frac{x}{8}\right|_{\left(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = -\left.\frac{2y}{9}\right|_{\left(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{3},$$

故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{\left(\frac{4}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)} = -\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{4}{5} = -\frac{5\sqrt{2}}{12}.$$

对于三元函数 $u = f(x,y,z)$ 来说,它在空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿着方向 $l$(设方向 $l$ 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$)的方向导数,同样可以定义为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0} = \lim_{\rho\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)}{\rho},$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$,$\Delta x = \rho\cos\alpha$,$\Delta y = \rho\cos\beta$,$\Delta z = \rho\cos\gamma$. 当函数 $u = f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微分时,函数在该点沿着方向 $l$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma.$$

**例 2**　设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$，求在点 $(1,2,3)$ 沿方向 $l$ 的方向导数，其中与 $l$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{e}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

**解**　由已知可得 $l$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$，而

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{x}{3}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3},\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{y}{6}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3},\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{z}{9}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3},$$

因此

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

## 三、梯度

**定义 2**　设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 $D$ 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $(x_0,y_0)\in D$，都可定出一个向量

$$f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j},$$

这向量称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的**梯度**，记为 $\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)$.

由定义 2 可见，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的梯度为一个向量，其大小

$$|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|=\sqrt{f_x^2(x_0,y_0)+f_y^2(x_0,y_0)},$$

而方向要结合方向导数来分析.

若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分，$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 是与方向 $l$ 同向的单位向量，则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}&=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l\\&=|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)||\boldsymbol{e}_l|\cos\theta=|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|\cos\theta,\end{aligned}$$

这里 $\theta$ 是梯度向量 $\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)$ 与 $\boldsymbol{e}_l$ 的夹角. 因此，当 $\theta=0$ 时，$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$ 取得最大值 $|\mathbf{grad}\ f(x_0,y_0)|$. 这就是说，当 $f(x,y)$ 在点 $P_0$ 可微分时，$f(x,y)$ 在点 $P_0$ 的梯度方向是 $f(x,y)$ 的值增长最快的方向，且沿这一方向的变化率就是梯度的模.

这个梯度方向究竟指向哪里呢？首先介绍等值线的概念.

一个二元函数 $z=f(x,y)$ 通常在几何上可表示为一个曲面，当用平面 $z=c$（$c$ 是常数）去截这个曲面时，截线 $L$ 的方程为

$$\begin{cases} z = f(x,y), \\ z = c, \end{cases}$$

那么这条水平截线 $L$ 上的点对应的函数值显然都为 $c$，为表现这个特点，设这条截线 $L$ 在 $xOy$ 面上的投影曲线为 $L^*$，则 $L^*$ 为 $xOy$ 面上一条面曲线，它在 $xOy$ 面上的方程为

$$f(x,y) = c,$$

将曲线 $L^*$ 上的所有点 $(x,y)$，代入 $z = f(x,y)$ 所得的函数值都是 $c$，所以称平面曲线 $L^*$ 为函数 $z = f(x,y)$ 的**等值线**(见图 9-12).

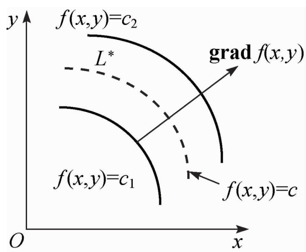



**图 9-12**

下面分析等值线 $f(x,y) = c$ 上任一点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的一个法向量. 若 $f_x(x_0, y_0)$，$f_y(x_0, y_0)$ 不同时为零，由隐函数存在定理，可得它在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的切线斜率 $k = -\dfrac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$，于是法线斜率为 $k' = -\dfrac{1}{k} = \dfrac{f_y(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)}$，由此即可写出点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的一个单位法向量

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2(x_0, y_0) + f_y^2(x_0, y_0)}}(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)),$$

这表明梯度 $\mathbf{grad}\ f(x_0, y_0)$ 方向与等值线上这点的一个法线方向相同，而沿这个方向的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} = |\mathbf{grad}\ f(x_0, y_0)|$，即 $\mathbf{grad}\ f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}$，由此得如下结论：

函数在一点的梯度方向与等值线在这点的一个法线方向相同，它的指向为从数值较低的等值线指向数值较高的等值线，且为增长最快的方向. 梯度的模就等于函数在这个法线方向的方向导数.

**例 3**　设某金属板上的电压分布为 $V = 50 - 2x^2 - 4y^2$，求在点 $(1, -2)$ 处沿哪个方向电压升高得最快？上升的速率为多少？

**解**　因为

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(1,-2)} = -4x|_{(1,-2)} = -4, \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(1,-2)} = -8y|_{(1,-2)} = 16,$$

于是 $V$ 在点$(1,-2)$处的梯度为

$$\mathbf{grad}\, V(1,-2)=-4\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}=4(-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}),$$

即电压沿 $-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ 方向升高得最快.

设梯度方向的向量为 $\boldsymbol{n}$,即 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$,于是电压上升的速率的最大值为

$$\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{n}}=|\mathbf{grad}\, V(1,-2)|=4\sqrt{(-1)^2+4^2}=4\sqrt{17}.$$

与方向导数类似,梯度概念同样可以推广到三元函数的情形.设函数 $u=f(x,y,z)$ 在空间区域 $G$ 内具有一阶连续偏导数,则对于每一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in G$,都可定出一个向量

$$f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k},$$

这向量称为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的**梯度**,记为 $\mathbf{grad}\, f(x_0,y_0,z_0)$.

对于三元函数的梯度,有与二元函数相类似的结论:

把 $f(x,y,z)=c$ 称为函数 $u=f(x,y,z)$ 的**等量面**,则函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的梯度作为一个向量,方向为取得最大方向导数的方向,与过点 $P_0$ 的等量面 $f(x,y,z)=c$ 在这点的法线的一个方向相同,它的指向为从数值较低的等量面指向数值较高的等量面.其模为方向导数的最大值,等于函数在这个法线方向的方向导数.

**例 4** 求函数 $u(x,y,z)=xy^2+yz^3+3$ 在点 $A(2,-1,1)$ 处的梯度.

**解** 因为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(2,-1,1)}=y^2|_{(2,-1,1)}=1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,-1,1)}=(2xy+z^3)|_{(2,-1,1)}=-3,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(2,-1,1)}=3yz^2|_{(2,-1,1)}=-3,$$

于是有

$$\mathbf{grad}\, u(2,-1,1)=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

由向量场的概念,可以说由梯度给出的向量场称为**梯度场**.

**例 5** 设质量为 $m$ 的质点位于原点 $O$,质量为 1 的质点位于点 $M(x,y,z)$,$|OM|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求$\dfrac{m}{r}$ 的梯度场.

**解** $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{m}{r}\right)=-\dfrac{m}{r^2}\dfrac{\partial r}{\partial x}=-\dfrac{mx}{r^3}$.

同理可得,$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{m}{r}\right)=-\dfrac{my}{r^3}$,$\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{m}{r}\right)=-\dfrac{mz}{r^3}$.

从而

$$\mathbf{grad}\,\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right),$$

用 $\boldsymbol{e}_r$ 表示$\overrightarrow{OM}$ 方向上的单位向量，有 $\boldsymbol{e}_r=\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}$，因此

$$\mathbf{grad}\,\frac{m}{r}=-\frac{m}{r^2}\boldsymbol{e}_r,$$

它表示两质点间的引力，方向由点$M$指向原点，大小与两质点的质量的乘积成正比，与它们的距离平方成反比. 因此，引力场是数量函数$\frac{m}{r}$ 的梯度场，而函数$\frac{m}{r}$ 称为**引力势**.

**引例说明**　试验表明，海水中血液的浓度近似为 $C=\mathrm{e}^{\frac{-(x^2+2y^2)}{10^4}}$，其中 $x$ 和 $y$ 是距离血源的水平坐标，单位为英尺. 因为鲨鱼总是追随最强的气味，所以每一瞬时都是按梯度的方向运动. 由梯度定义可得 $\mathbf{grad}\,C=10^{-4}(-2x\boldsymbol{i}-4y\boldsymbol{j})\mathrm{e}^{\frac{-(x^2+2y^2)}{10^4}}$，若设鲨鱼前进路线对应的曲线方程为 $y=f(x)$，则可用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}\mathrm{d}x+\boldsymbol{j}\mathrm{d}y$ 表示鲨鱼前进路线的向量增量，显然它必须与梯度方向吻合. 由此可得$\frac{\mathrm{d}x}{-2x}=\frac{\mathrm{d}y}{-4y}$，经积分可得 $y=Ax^2$，即鲨鱼的攻击路线为抛物线.

## 习题 9-7

1. 设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 $P$ 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

2. 设 $x$ 轴正向到方向 $l$ 的转角为$\varphi$，求函数 $z=x^2-xy+y^2$ 在点$(1,1)$沿方向 $l$ 的方向导数，并确定转角 $\varphi$，使得方向导数有最大值.

3. 试证明函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点$(0,0)$沿任意方向 $l$ 的方向导数存在，但偏导数不存在.

4. 试证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^4\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点$(0,0)$沿任意方向 $l$ 的方向导数都存在，但不连续.

5. 求 $\mathbf{grad}\,\frac{1}{x^2+y^2}$.

6. 设 $u,v$ 都是 $x,y,z$ 的函数，$u,v$ 的各偏导数都存在且连续，证明：

(1) $\mathbf{grad}(u+c)=\mathbf{grad}\ u$;

(2) $\mathbf{grad}(\alpha u+\beta v)=\alpha\mathbf{grad}\ u+\beta\mathbf{grad}\ v$;

(3) $\mathbf{grad}(uv)=u\ \mathbf{grad}\ v+v\ \mathbf{grad}\ u$;

(4) $\mathbf{grad}\ \dfrac{v}{u}=\dfrac{u\mathbf{grad}\ v-v\mathbf{grad}\ u}{u^2}$;

(5) $\mathbf{grad}\ f(u)=f'(u)\mathbf{grad}\ u$.

7. 设一金属球体内各点处的温度离球心的距离成反比,证明球体内任意一点(异于球心)处沿着指向球心的方向上升得最快.

# 第八节　多元函数的极值与最值

与一元函数一样,在研究最值问题前,先对多元函数的极值问题进行分析. 本节以二元函数为例进行说明,三元及以上函数的极值可用类似的方法求得.

## 一、二元函数的极值

**定义 1**　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义,若对于该邻域内异于 $(x_0,y_0)$ 的点 $(x,y)$,都有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0)(\text{或 } f(x,y)>f(x_0,y_0)),$$

则称函数在点 $(x_0,y_0)$ 有**极大值**(或**极小值**).

极大值、极小值统称为**极值**. 使函数取得极值的点称为**极值点**.

例如,函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$(见图 9-13a) 在点(0,0)处有极大值 1. 又如,函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$(见图 9-13b) 在点(0,0) 处有极小值 0.

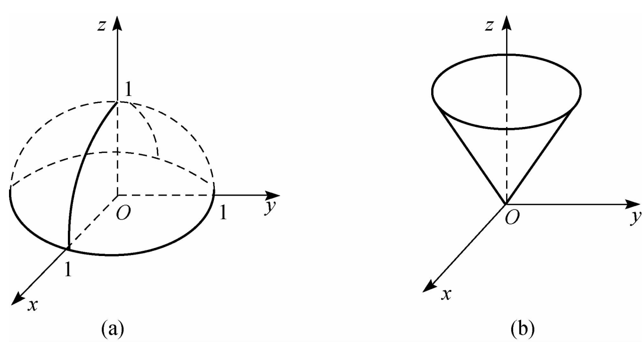



图 9-13

在一般情况下，极值不容易看出，因此必须给出判定极值的方法. 与一元函数类似，二元函数的极值点也与驻点有关.

**定义 2**　使 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 $(x_0,y_0)$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 的**驻点**.

**定理 1**（必要条件）　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 具有偏导数，且在点 $(x_0,y_0)$ 处有极值，则点 $(x_0,y_0)$ 必为函数的驻点，即

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$$

**证明**　不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处有极大值. 依极大值的定义，在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内异于 $(x_0,y_0)$ 的点都适合不等式

$$f(x,y)<f(x_0,y_0).$$

特别地，在该邻域内取 $x\neq x_0, y=y_0$ 的点，也应适合不等式

$$f(x,y_0)<f(x_0,y_0),$$

这表明一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值，因此必有

$$f_x(x_0,y_0)=0.$$

类似地可证 $f_y(x_0,y_0)=0$.

**注**：由定理 1 可知，具有偏导数的函数的极值点必定是驻点，但是函数的驻点不一定是极值点. 例如，点 $(0,0)$ 是函数 $z=xy$ 的驻点，但是函数在该点并无极值. 因为在点 $(0,0)$ 处的函数值为 0，而在点 $(0,0)$ 的任一邻域内，总有使函数值为正的点，也有使函数值为负的点.

怎样判定一个驻点是否是极值点呢？

**定理 2**（充分条件）　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，且点 $(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点，令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则

（1）$AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值.

（2）$AC-B^2<0$ 时没有极值.

（3）$AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，需另行讨论.

证明略.

**例 1**　求函数 $f(x,y)=3x^2y+y^3-3x^2-3y^2+2$ 的极值和极值点.

**解**　定义域 $D=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty\}$.

$$f_x(x,y)=6xy-6x, f_y(x,y)=3y^2-6y+3x^2,$$

联立方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=6xy-6x=0, \\ f_y(x,y)=3y^2-6y+3x^2=0, \end{cases}$ 求得驻点为 $(1,1)$，$(-1,1)$，

$(0,0)$,$(0,2)$.

再求出二阶偏导数

$$f_{xx}(x,y)=6y-6, f_{xy}(x,y)=6x, f_{yy}(x,y)=6y-6.$$

在点$(1,1)$处,$AC-B^2=-36<0$,所以点$(1,1)$不是极值点;

在点$(-1,1)$处,$AC-B^2=-36<0$,所以点$(-1,1)$不是极值点;

在点$(0,0)$处,$AC-B^2=36>0$,且$A=-6<0$,所以点$(0,0)$为$f(x,y)$的极大值点,极大值为$f(0,0)=2$;

在点$(0,2)$处,$AC-B^2=36>0$,且$A=6>0$,所以点$(0,2)$为$f(x,y)$的极小值点,极小值为$f(0,2)=-2$.

与一元函数的情形相同,函数在偏导数不存在的点上也有可能取得极值. 例如,$f(x,y)=\sqrt{x^2+3y^2}$在点$(0,0)$没有偏导数,但$f(0,0)=0$是它的极小值. 因此,在考虑函数的极值问题时,除了考虑函数的驻点外,也应考虑使偏导数不存在的点.

## 二、最大值与最小值

有界闭区域$D$上的连续函数一定有最大值和最小值. 这种使函数取得最大值或最小值的点可能在$D$的内部,也可能在$D$的边界上. 假定函数在$D$上连续、在$D$内可微分且只有有限个驻点,这时如果函数在$D$的内部取得最大值(最小值),则这个最大值(最小值)也是函数的极大值(极小值). 因此,在上述假设下,求函数最值的方法是:将函数在$D$内的所有驻点处的函数值及在$D$的边界上的最大值和最小值相互比较,其中最大的就是最大值,最小的就是最小值.

**例 2** 求函数$f(x,y)=x^2+4xy-2y^2-10x+4y$在区域$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 4\}$上的最值.

**解** 令$\begin{cases} f_x(x,y)=2x+4y-10=0, \\ f_y(x,y)=4x-4y+4=0, \end{cases}$解得驻点为$(1,2)$,则$f(1,2)=-1$.

在边界$x=0(0\leqslant y\leqslant 4)$上,$f(0,y)=-2y^2+4y$,驻点为$y=1$,则$f(0,1)=2$;

在边界$y=0(0\leqslant x\leqslant 4)$上,$f(x,0)=x^2-10x$,没有驻点;

在边界$y=4-x(0\leqslant x\leqslant 4)$上,$f(x,4-x)=-5x^2+18x-16$,驻点为$x=1.8$,则$f(1.8,4-1.8)=0.2$.

又$f(0,0)=0$,$f(0,4)=-16$,$f(4,0)=-24$,于是

$$\begin{aligned} \max_D f(x,y) &= \max\{f(1,2),f(0,1),f(1.8,2.2),f(0,0),f(0,4),f(4,0)\} \\ &= \max\{-1,2,0.2,0,-16,-24\}=2, \end{aligned}$$

$$\min_D f(x,y)=\min\{-1,2,0.2,0,-16,-24\}=-24.$$

**注**:若根据问题的实际意义,知道函数在区域$D$内存在最大值(或最小值),且函数在$D$内只有一个驻点,则驻点处的函数值就是所求的最大值(或最小值).

## 三、条件极值　拉格朗日乘数法

前面讨论的极值问题,对于函数的自变量,除了限制在函数的定义域内以外,并无其他条件.但有时会遇到对函数的自变量还有附加条件的极值问题.例如,要做一个容积为定数$a$且用料最省的长方体铁皮箱.若以$x,y,z$表示长方体的三棱长,则此问题化为在约束条件$xyz=a$下,求表面积$s=2(xy+yz+xz)$的最小值.这种带有约束条件的极值问题称为**条件极值**,不带有约束条件的极值问题称为**无条件极值**.

条件极值有时可以将条件代入目标函数,化为无条件极值来求解.例如,上面提出的长方体表面积最小化问题,由约束条件解出$z$,并代入表面积的表达式,得

$$s=2\left(xy+\frac{a}{x}+\frac{a}{y}\right),$$

便化为一个无条件极值问题.但许多条件极值不易化为无条件极值.为了能够直接求出条件极值,通常采用下面要介绍的拉格朗日乘数法.

现在求函数

$$z=f(x,y) \qquad ①$$

在条件

$$\varphi(x,y)=0 \qquad ②$$

下的极值.

假定函数①在$(x_0,y_0)$取得所求的极值,在$(x_0,y_0)$的某一邻域内$f(x,y)$与$\varphi(x,y)$均有连续的一阶偏导数,且$\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$.

由于函数①在$(x_0,y_0)$取得所求的极值,所以有

$$\varphi(x_0,y_0)=0, \qquad ③$$

因为$\varphi(x,y)$满足隐函数存在定理的条件,所以方程②确定一个连续且具有连续导数的函数$y=g(x)$,且$g'(x_0)=-\dfrac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$.于是,$x=x_0$必定也是$z=f[x,g(x)]=h(x)$的极值点.由一元可导函数取得极值的必要条件知

$$h'(x_0)=f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)g'(x_0)=0, \qquad ④$$

把$g'(x_0)=-\dfrac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$代入式④,得

$$f_x(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=0. \qquad ⑤$$

式 ③ 和式 ⑤ 就是函数 ① 在条件 ② 下在$(x_0,y_0)$取得极值的必要条件.

设$\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=-\lambda$,上述必要条件就变为

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda\varphi_x(x_0,y_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda\varphi_y(x_0,y_0)=0, \\ \varphi(x_0,y_0)=0. \end{cases} \tag{⑥}$$

容易看出,⑥ 中的前两式的左端正是函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

的两个一阶偏导数在$(x_0,y_0)$的值.

由以上讨论,归纳出拉格朗日乘数法:

(1) 构造辅助函数(称为**拉格朗日函数**)

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 $\lambda$ 称为**拉格朗日乘子**.

(2) 点$(x_0,y_0)$为条件极值点的必要条件是 $x_0,y_0$ 与 $\lambda$ 满足方程组

$$\begin{cases} L_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ L_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0, \end{cases}$$

由此可解出 $x_0,y_0$ 与 $\lambda$.

(3) 判定$(x_0,y_0)$是否为极值点,一般可以由问题的实际意义作出判定.

这方法还可以推广到自变量多于两个且附加条件多于一个的情形. 例如,要求函数 $u=f(x,y,z,t)$ 在附加条件

$$\varphi(x,y,z,t)=0,\psi(x,y,z,t)=0$$

下的极值,可先构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\varphi(x,y,z,t)+\lambda_2\psi(x,y,z,t),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2$ 均为参数,求其一阶偏导数,并使之为零,然后与附加条件中的两个方程联立起来求解,这样得到的$(x_0,y_0,z_0,t_0)$就是可能极值点. 再判断该可能极值点是否为极值点.

**例 3** 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$ 在闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+4y^2\leqslant 1\}$ 上的最值.

**解** 解此题可分两步进行.

(1) 求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$ 在 $D$ 内部的驻点. 令

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-y\mathrm{e}^{-xy}=0, \\ f_y(x,y)=-x\mathrm{e}^{-xy}=0, \end{cases}$$

得唯一驻点$(0,0)$.

(2) 求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$ 在 $D$ 的边界 $x^2+4y^2=1$ 上可能的极值点. 作拉格朗日函

数

$$L(x,y,\lambda)=e^{-xy}+\lambda(x^2+4y^2-1).$$

解方程组
$$\begin{cases}L_x=-ye^{-xy}+2\lambda x=0, & ⑦\\ L_y=-xe^{-xy}+8\lambda y=0, & ⑧\\ x^2+4y^2-1=0, & ⑨\end{cases}$$

由式 ⑦,式 ⑧ 得

$$2\lambda x=ye^{-xy}, \qquad ⑩$$

$$8\lambda y=xe^{-xy}, \qquad ⑪$$

由式 ⑩ 和式 ⑪ 相除,得

$$x^2=4y^2,\text{即 } x=\pm 2y,$$

代入式 ⑨,得 $y=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$,所以 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

因此,可能的条件极值点为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

比较 $f(0,0)=1,f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{4}},f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{\frac{1}{4}},f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{\frac{1}{4}}$,$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)=e^{-\frac{1}{4}}$ 的大小知,该函数在闭区域 $D$ 上的最大值为$\sqrt[4]{e}$,最小值为$\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$.

**例 4**　求抛物线 $y=x^2$ 到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离.

**解**　抛物线上的点$(x,y)$到直线 $x-y-2=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|x-y-2|}{\sqrt{2}}$,取目标函数为 $d^2=\dfrac{(x-y-2)^2}{2}$,限制条件为 $y=x^2$,作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=\frac{(x-y-2)^2}{2}+\lambda(y-x^2).$$

令

$$\begin{cases}L_x=x-y-2-2\lambda x=0,\\ L_y=-(x-y-2)+\lambda=0,\end{cases}$$

解得$\lambda(-2x+1)=0$.

若 $\lambda=0$,则 $x-y-2=0$,将限制条件代入,得 $x-x^2-2=0$,这个方程无实数解;若 $-2x+1=0$,则得 $x=\dfrac{1}{2}$,从而 $y=\dfrac{1}{4}$,这是唯一可能的极值点. 因为由问

题本身可知最小值一定存在,所以最小值就在这个可能的极值点处取得.也就是说,在 $x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{4}$ 时取得距离的最小值,即最短距离为

$$d=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7}{4\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

## 习题 9-8

1. 求函数 $z=x^3-y^3-3xy$ 的极值和极值点.
2. 求函数 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.
3. 在平面 $3x+4y-z=26$ 上求一点,使它与坐标原点的距离最短.
4. 求函数 $z=xy$ 在适合附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.
5. 在半径为 $r$ 的球内接一长方体,问长、宽、高各为多少时,其体积最大?
6. 在两直角边分别是 $a,b$ 的直角三角形中内接一个矩形,求矩形的最大面积.
7. 在椭球面 $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}+\dfrac{z^2}{2^2}=1$ 的第一卦限上点 $P$ 处作切平面,使与三个坐标平面所围四面体的体积最小,求点 $P$ 坐标.
8. 已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$,并且 $f(1,1)=2$. 求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

## 本章小结

### 一、基本内容

(1) 把自变量看成一点 $P$,对于一元函数,点 $P$ 在区间上变化;对于二元函数 $f(x,y)$,点 $P(x,y)$ 将在一平面区域中变化.这样,无论对一元、二元或二元以上函数都可以统一写成

$$u=f(P),$$

因此,可以把一元和多元函数的极限和连续统一表示成

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A,\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

(2) 二元函数微分学与一元函数微分学相比,其根本区别在于自变量点 $P$ 的变化从一维区间发展成二维区域.在区间上点 $P$ 的变化只能有左右两个方向;对于区

域来说，点 $P$ 的变化则可以有无限多个方向.

(3) 二元函数的极限、连续、偏导数、可微分的关系如下：


(4) 求多元函数偏导数的方法，实质上就是一元函数求导法. 例如，对 $x$ 求偏导，就是把其余变量都暂时看成常量，从而函数就变成是对 $x$ 的一元函数.

(5) 要熟练掌握多元复合函数的求导法则，在求复合函数的二阶偏导数时，要注意关于中间变量的一阶偏导数仍为中间变量的函数.

(6) 掌握由一个方程或方程组确定的隐函数求导公式.

(7) 了解空间曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求它们的方程.

(8) 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 处的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 刻画了函数在该点当自变量沿射线 $l$ 变化时的变化率；梯度 $\mathbf{grad}\, z$ 的方向则是函数在点 $(x,y)$ 处方向导数最大的射线方向. 因此沿梯度方向也是函数值增加最快的方向.

(9) 掌握二元函数极值的必要条件和充分条件. 一般所遇到的函数，根据必要条件求出可能的极值点(驻点和偏导数不存在的点)，对于驻点用充分条件验证，而对于偏导数不存在的点，只能用极值的定义来验证.

(10) 条件极值一般都是求最值的应用问题. 拉格朗日乘数法是一个有效的方法. 如果问题存在最大值或最小值，又仅求出一个可能的极值点，可以肯定该点就是所求最值点.

## 二、重点

(1) 多元函数的概念，偏导数与全微分的概念.
(2) 多元复合函数和隐函数的求导.
(3) 多元函数的极值和最值的应用问题.
(4) 方向导数与梯度.

## 三、难点

(1) 复合函数和隐函数的二阶偏导数的计算.
(2) 最值的应用问题及拉格朗日乘数法.

## 总复习题九

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sin(xy^2)}{y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1-2xy)^{\frac{1}{xy}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,1)} \dfrac{xy-3}{\sqrt{xy+1}-2}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{xy-1}{x^2+y^2}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(x+\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}$.

2. 求下列函数的一阶偏导数：

(1) $u=x^{\frac{y}{z}}$；　　(2) $u=\sin(x+y^2-\mathrm{e}^z)$；

(3) $u=\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{xy}{z}$；　　(4) $z=x^2\sin y$；

(5) $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$，求 $f_x(2\sqrt{2},3)$，$f_y(2\sqrt{2},3)$；

(6) $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

3. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{yz}(0,-1,0)$ 和 $f_{zx}(2,0,1)$.

4. 求函数 $z=y^x\ln(xy)$ 的 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\mathrm{d}z$.

5. 求下列函数的全微分：

(1) $z=(xy)^y$；　　(2) $u=(xy)^z$.

6. 求函数 $z=x^2y^3$ 在点 $(2,-1)$ 处的全微分.

7. 证明函数 $u=z\arctan\dfrac{x}{y}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

8. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续，并求 $f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$.

9. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的可导性，连续性与可微性.

10. 求下列函数的全导数：

(1) $z=\mathrm{e}^{u-2v}$，其中 $u=\sin t$，$v=t^2$；

(2) $z=\arcsin(u-v)$，其中 $u=3t$，$v=4t^3$.

11. 设 $z=u\arctan(uv)$，$u=x^2$，$v=xe^y$，求 $z$ 关于 $x$，$y$ 的偏导数.

12. 设 $z=x^3f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，其中 $f$ 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点$(1,1)$处可微，且 $f(1,1)=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f[x,f(x,x)]$，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

14. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程.

15. 求函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$沿从点 $P(1,0)$到点 $Q(2,-1)$的方向的方向导数.

16. 求函数 $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$ 的极值.

17. 求表面积为 $a^2$ 而体积为最大的长方体的体积.

18. 某厂要用铁板制成一个体积为 2 $\mathrm{m}^3$ 的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省？