第一章

函数　极限　连续

极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 微分和积分就是两类不同类型的极限，掌握和运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要性态，连续函数是微积分研究的主要对象. 本章将在复习基本初等函数的概念和性质的基础上，引入复合函数和初等函数概念，介绍极限与连续的基本知识、求极限的基本方法，为以后的学习打下必要的基础.

第一节　函　　数

一、区间与邻域

1. 区间

区间是通过不等式来定义的一类实数集.

定义 1　设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，则实数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$. a 和 b 称为开区间 (a,b) 的**端点**，这里 $a \notin (a,b)$，$b \notin (a,b)$. 实数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为**闭区间**，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的**端点**，这里 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$.

类似地可以定义：$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$. $[a,b)$ 称为**左闭右开区间**，$(a,b]$ 称为**左开右闭区间**，$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 统称为**半开半闭区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为这些区间的**长度**. 从数轴上看这些有限区间是长度有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 和开区间 (a,b) 在数轴上表示出来，分别

如图 1-1(a) 与图 1-1(b) 所示. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示**无限区间**. 例如,$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$,$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$. 这两个无限区间在数轴上表示如图 1-1(c) 与图 1-1(d) 所示. 全体实数构成的集合 $\mathbf{R}$,也可记作 $(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

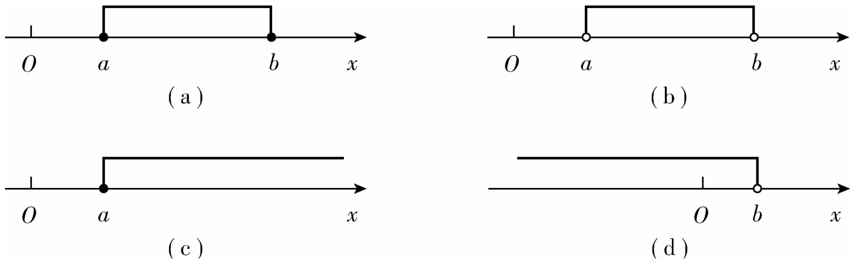

图 1-1

以后在不需要指明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,就简单地统称为"区间",且常用 I 表示.

2. 邻域

邻域也是一个经常用到的概念,在极限、连续、导数、级数等内容中都将涉及. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

定义 2 设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$,点 a 称为这个邻域的**中心**,δ 称为这个邻域的**半径**.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,因此 $U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$. 因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离,所以 $U(a,\delta)$ 又表示:与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后称为点 a 的**去心 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$. 这里 $|x-a|>0$ 就表示 $x \neq a$.

为了使用方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的**右 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域. 例如,$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y) \mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$,即为平面 xOy 上的一个矩形区域,这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

二、函数

1. 函数的概念

函数实际上就是一种满足某种条件的对应关系，在初等数学中学习过函数，其定义为：设在某个变化过程中，有两个变量 x 与 y，如果对于 x 所考虑范围内的每一个数值，都有一个确定的实数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数.

现在用集合的语言给出函数的定义.

定义 3　设有两个变量 x,y 和一个非空实数集合 D，若存在一个对应法则 f，使得对每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应法则 f 为定义在 D 上的一个**函数关系**，或称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 集合 D 称为函数的**定义域**，也可以记作 D_f 或 $D(f)$.

对于 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值，记作 y_0，$f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的函数值.

全体函数值的集合 $\{y\mid y=f(x),x\in D(f)\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 R_f 或 $R(f)$.

理解函数的定义时，应注意以下几点：

(1) 定义域和对应法则是函数的两个要素. 两个函数相同的充分必要条件是它们具有相同的对应法则及相同的定义域. 关于对应法则，定义中用 f 表示，如果同时讨论几个不同的函数，应该用不同的字母表示不同的对应法则. 例如，用 g,φ,F,G 等表示. 关于定义域，如果函数描述的是实际问题，应由实际问题的实际意义而定. 如果不考虑函数的实际意义，我们规定函数的定义域，是使函数解析式有意义的自变量所能取的值的全体.

(2) 函数的定义域 D 与值域 $R(f)$ 均是由实数构成的集合.

(3) 根据函数的定义，对于定义域中的每一个 x 值，函数仅有一个确定的值与之对应. 在实际问题中，有时会遇到对于定义域中的任一个 x 值，对应的 y 值有几个，这时称该函数为**多值函数**，定义中的函数称为**单值函数**.

例如，圆的方程 $x^2+y^2=r^2$，对于 $x\in(-r,r)$，可以确定 y 的对应值有两个，即 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$，这是多值函数.

在遇到多值函数时，可将它分成几个单值函数，称为**单值支**. 例如，$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 可以分成 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 两个单值支. 今后，如无特别申明，所讨论的函数均为单值函数.

(4) 函数一般都是因变量用自变量的一个数学表达式表示出来的，即 $y=f(x)$ 的形式. 如 $y=2x^2-3x+5$，$y=\sqrt{1-\sin x}$ 等，这些函数都称为**显函数**，而有些函

数,它们的对应法则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示的,这些函数称为**隐函数**. 如 $x^2+y^2-1=0$,$xy=1$, $x+y+\sin xy=0$ 等.

(5) 如果所研究的变量多于两个,则称所确定的函数为**多元函数**. 关于多元函数,将在下册研究.

例 1 $y=\arcsin(2+x^2)$.

解 因为对任何实数 x,$2+x^2\geqslant 2$ 都超出了反正弦函数的定义域$[-1,1]$,按给定的对应法则都找不到与之对应的 y 值. 所以该例中 x 与 y 的关系不是函数关系.

例 2 研究 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数关系.

解 因为 $y=x$ 定义域为$(-\infty,+\infty)$,而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,因此,两者表示的是两个不同的函数关系.

2. 函数的表示法

函数的表示法一般有三种:解析法、表格法及图像法.

(1) **解析法** 解析法又称公式法,它是直接用数学式子表示两个变量的函数关系的方法. 它的优点是准确、完整,便于理论分析,是微积分中常用的一种表示方法. 例如,球的体积 V 与半径 r 之间的关系可表示为 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$,这里 V 和 r 都是变量,当半径 r 变化时,球的体积 V 作相应变化.

(2) **表格法** 表格法就是将自变量的一系列取值与对应的函数值列成表格,如平方表、对数表、三角函数表等都是用表格法表示函数. 它的优点是使用方便,在实际工作中经常用到. 表格法的缺点是不完整,即有些函数不能通过列表法给出自变量每一个取值所对应的函数值.

(3) **图像法** 若横坐标为自变量 x 的取值,纵坐标为对应的函数值 y,则函数 $y=f(x)$ 的每对取值(x,y) 都对应着平面直角坐标系中的一个点. 这些点的全体就形成平面上的一条曲线. 这条曲线从几何上描述了函数的变化规律. 因此,用图像表示函数的方法就称为图像法. 它的优点是直观,它的缺点是不够准确和完整,不便于作理论研究.

需要说明的是,在实际应用中,往往是三种方法配合使用. 除上面所述的三种表示函数的方法外,还有其他的表示函数的方法. 例如,“y 为不超过 x 的最大整数”是用语言定义的函数,通常记为 $y=[x]$,如$[2.7]=2$,$[-2.3]=-3$.

三、函数的性质

1. 函数的奇偶性

定义 4　给定函数 $y=f(x)$，如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

对于偶函数，因 $f(-x)=f(x)$，所以偶函数的图形关于 y 轴对称；对于奇函数，由于 $f(-x)=-f(x)$，所以奇函数的图形关于原点对称. **奇、偶函数的定义域一定是关于原点对称的对称区间.**

例 3　判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；　　(2) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

解　(1) 因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$，所以 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 为奇函数.

(2) 因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$，所以 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 为偶函数.

例 4　设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上有定义，令 $\varphi(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$；$\psi(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. 证明 $\varphi(x)$ 为偶函数，$\psi(x)$ 为奇函数.

证　因为 $\varphi(-x)=\dfrac{f(-x)+f(x)}{2}=\varphi(x)$，$\psi(-x)=\dfrac{f(-x)-f(x)}{2}=-\psi(x)$，所以 $\varphi(x)$ 为偶函数，$\psi(x)$ 为奇函数.

2. 函数的周期性

定义 5　对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 a，使得 $f(x)=f(x\pm a)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**，常数 a 称为函数的**周期**. 满足这个等式的最小正数 a，称为函数的**最小正周期**.

通常情况下，我们说的周期是指函数的最小正周期. 例如，$y=\sin x$ 就是周期函数，最小正周期为 2π.

例 5　设存在两个实数 $a,b(a<b)$，使得对任意 x，函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f(a-x)=f(a+x),f(b-x)=f(b+x).$$

试证 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

证　因为对任意 x，有

$$f[x+2(b-a)]=f[b+(x+b-2a)]=f[b-(x+b-2a)]$$

$$= f(2a-x) = f[a+(a-x)] = f[a-(a-x)] = f(x).$$

得证.

3. 函数的单调性

定义 6 如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是**单调增加**(或称**单调递增**)的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在区间 (a,b) 内是**单调减少**(或称**单调递减**)的.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的，单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

4. 函数的有界性

定义 7 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义((a,b) 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分). 如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**有界**的，其中 $-M$，M 分别称为函数 $f(x)$ 的**下界**与**上界**. 如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是**无界**的.

例如，函数 $y=\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对于任何实数 x，有 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 上是无界的，但在 $[1,+\infty)$ 上却是有界的. 请读者自己证明.

四、反函数

1. 反函数的定义

定义 8 设 $y=f(x)$ 是定义在 $D(f)$ 上的一个函数，值域为 $R(f)$. 如果对每一个 $y\in R(f)$ 有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 $x\in D(f)$ 与之对应，其对应法则记为 f^{-1}，这个定义在 $R(f)$ 上的函数 $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$ 称为 $f(x)$ 的**反函数**，或称它们互为反函数.

函数 $y=f(x)$，x 为自变量，y 为因变量，定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$.

函数 $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$，y 为自变量，x 为因变量，定义域为 $R(f)$，值域为 $D(f)$.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量. 因此将 $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$ 改写为以 x 为自变量、以 y 为因变量的函数关系 $y=f^{-1}(x)$，这时可以说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

注 由此定义可知，函数 $y=f(x)$ 也是函数 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数.

定理(反函数的存在定理)　若 $y = f(x)$ 在(a,b) 上单调递增(减),其值域为 $\mathbf{R}$,则它的反函数必然在 $\mathbf{R}$ 上确定,且单调递增(减).

注　单调性并不是一个函数存在反函数的必要条件,读者不难举出非单调函数存在反函数的实例,作为思考题留给读者自己找出答案.

2. 反函数的图像性质

在同一坐标平面内,$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y = x$ 对称的,而 $y = f(x)$ 与反函数 $x = \varphi(y)$ 的图形却是同一个.

例如,函数 $y = 2^x$ 与函数 $y = \log_2 x$ 互为反函数,则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y = x$ 对称的;而 $y = 2^x$ 与 $x = \log_2 y$ 的图形在同一直角坐标系中表示的是同一条曲线.如图 1-2 所示.

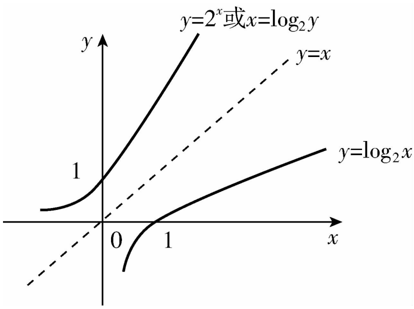

图 1-2

五、分段函数

在实际问题中,有时会碰到在定义域内,自变量的不同取值范围内,函数分别用不同的解析式表达,这类函数称为**分段函数**.

例如,绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

和符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

都是分段函数.

注　求分段函数在一点的函数值时,首先要找出该点的所属范围,然后再代入相应的表达式,特别应注意自变量取值范围的分界点(也称为分段函数的分段点)处

的函数值是如何定义的.

例 6 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -2<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 2+x, & 1<x<+\infty.\end{cases}$ 求:

(1) $f(x)$ 的定义域.

(2) $f(x)$ 在 $x=-1,\frac{1}{2},3$ 处的函数值.

解 (1) $f(x)$ 的定义域是自变量取值的全体,对分段函数而言,是各部分取值范围的并集,故 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,0]\cup(0,1]\cup(1,+\infty)=(-2,+\infty)$.

(2) 因为 $-1\in(-2,0]$,所以 $f(-1)=-1$;又因为 $\frac{1}{2}\in(0,1]$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,同理,由于 $3\in(1,+\infty)$,所以 $f(3)=2+3=5$.

例 7 设有一奇函数 $f(x)$,当 $x>0$ 时,有表达式 2^x-1,试求此函数及其反函数的表达式.

解 由于所求函数 $f(x)$ 为奇函数,所以,当 $x<0$ 时,表达式为 $-(2^{-x}-1)$,故有

$$f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x>0,\\ 1-2^{-x}, & x<0.\end{cases}$$

其反函数为

$$f(x)=\begin{cases}\log_2(1+x), & x>0,\\ -\log_2(1-x), & x<0.\end{cases}$$

六、初等函数

1. 基本初等函数

已经学过最常用的五种函数,分别是:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数.这五种函数统称为**基本初等函数**,这些函数的定义、图像和性质这里不再赘述.

2. 简单函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算而构成的函数称为**简单函数**.

例如,函数 $y=3x^2-5x-2$,$y=2\sin x+9e^x$ 等.

3. 复合函数

在某一研究过程中,有时两个变量之间的函数关系不是直接给出的,而是通过

某一中间变量把它们联系起来的，这种由两个或两个以上的函数借助中间变量而生成的新函数称为复合函数. 例如，函数 $y=\sin u$ 与 $u=2x-1$ 借助中间变量 u 的传递生成新的函数 $y=\sin(2x-1)$ 为 x 的复合函数. 一般地，我们有如下定义.

定义 9　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域(或其一部分)取值时，$\varphi(x)$ 的值均在 $y=f(u)$ 的定义域内，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，这个函数称为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 称为**中间变量**.

以上是由两个函数生成的复合函数的定义，不难将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数中去. 例如，由三个函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=2x-3$ 生成的复合函数为 $y=\sqrt{\ln(2x-3)}$，$x\in[2,+\infty)$.

由定义可知，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一个子集，但不能是空集，否则将不能构成复合函数. 应注意的是，一般来说复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是与 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 两个函数都不相同的新函数.

注　并不是任意两个函数都能进行复合运算生成复合函数. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=-\mathrm{e}^x$ 就不能复合成一个复合函数，这是因为无论 x 取何值，$\sqrt{-\mathrm{e}^x}$ 均无意义；又如由 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 也不能复合成复合函数.

我们不仅能够将若干函数生成一个复合函数，而且还要善于将一个复合函数“分解”为若干个简单函数，后者在求复合函数的导数时尤为重要. 例如，复合函数 $y=\ln\sin^2(2x-1)$ 是由 $y=\ln u$，$u=v^2$，$v=\sin w$，$w=2x-1$ 这四个简单函数复合而成的.

例 8　函数 $y=2^{\sin(2x+1)}$ 是由哪些简单函数复合成的？

解　函数是由 $y=2^u$，$u=\sin v$，$v=2x+1$ 三个简单函数构成的.

例 9　设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\cos x$ 求 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)=\cos^2x$，$\varphi[f(x)]=\cos[f(x)]=\cos x^2$.

4. 初等函数

定义 10　由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算而构成的，并且可用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=\ln\sin(x^2-1)+3\mathrm{e}^x-x\tan 2x$ 和 $y=\sqrt{\cos(3x-1)}$ 等；再如 $xy-2x^2+\mathrm{e}^y=0$，虽以隐函数形式表示，但它是个初等函数，高等数学中所讨论的函数除分段函数外，大部分都是初等函数.

一般情况下，分段函数不是初等函数，但也有例外. 例如，分段函数$y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$

能转化为 $y=\sqrt{x^2}$,而 $y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成,并可用一个式子表示,所以这个分段函数是初等函数.

*5. 双曲函数的定义和性质

双曲函数是工程上常用的一种初等函数,它实际上是由指数函数 e^x 和 e^{-x} 构成的初等函数.

双曲正弦 $y=\mathrm{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$;

双曲余弦 $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$;

双曲正切 $y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

显然,它们的定义域为$(-\infty,+\infty)$,并由例 3 可知,双曲正弦为奇函数,双曲余弦为偶函数,也容易验证双曲正切为奇函数.有兴趣的读者不难发现双曲正切函数还是一个有界函数,即 $|\mathrm{th}x|<1$.另外双曲函数还有类似于三角函数的一些公式(读者自己证明):

$$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1,\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x,\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x.$$

思考

(1) 分段函数求反函数时,应注意什么问题?

(2) 在复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义中,要求内层函数 $u=\varphi(x)$ 的函数值集合非空,且全部或部分包含在外层函数 $y=f(u)$ 的定义域之中,为什么要附加这些限制条件?

习题 1-1

(1) 求下列函数的定义域.

① $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$;　② $y=\ln[\ln(\ln x)]$;

③ $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\leqslant 0,\\ x+2, & 0<x\leqslant 2;\end{cases}$　④ $y=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 1, & 1<x\leqslant 3,\\ \sin x, & x>3.\end{cases}$

(2) 试证下列函数在指定区间内的单调性.

① $y=(x-1)^2(x+1)^3,\left(-\infty,\dfrac{1}{5}\right)$;　② $y=x^3-3x,(-1,1)$.

(3) 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇(偶)函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内是单调增加的，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内是单调增加(减少)的.

(4) 证明：① 在对称区间上两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

② 在对称区间上两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

(5) 指出下列函数的奇偶性.

① $y=x(1-x^2)$；　② $y=2x^2-1$；　③ $y=x(x+1)$.

(6) 指出下列函数的最小正周期.

① $y=\sin(3x-2)$；　② $y=\cos 2x$；

③ $y=2+\cos(3x+1)$；　④ $y=\sin^2 x$.

(7) 求下列函数的反函数.

① $y=x^3+1$；　② $y=2+\ln(x+1)$.

(8) 求下列函数构成的复合函数，并求出复合函数的定义域.

① $y=u^3, u=\cos x$；　② $y=\sin u, u=1+x^2$；

③ $y=\sqrt{u}, u=3x+1$；　④ $y=\ln u, u=\sin v, v=2x$.

(9) 将下列复合函数分解为简单函数.

① $y=\ln\sin x^2$；　② $y=\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}$；

③ $y=\arctan^2\dfrac{1-x}{1+x}$；　④ $y=a^{\cos^2 x}$.

(10) 设 $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\geqslant 1, \\ x^2-1, & x<1, \end{cases}$ 求 $f(0), f(2), f(x-1)$.

第二节　数列的极限

我国古代哲学家庄周(约公元前369—前286年)在他的《庄子·天下篇》引到惠施的话："一尺之锤，日取其半，万世不竭."这句话用数量形式加以描述，得到一系列有次序的数 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2^2},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$. 显然，从直观上可以看出，当 n 无限增大时，上述有次序的数无限趋近于0. 但是，不论 n 多么大，$\dfrac{1}{2^n}$ 总不等于0(万世不竭). 这生动地反映了我国古代学者朴素的"极限思想".

虽然在高中阶段我们已初步认识了极限的概念，但只是了解了极限概念的定性

描述.本节将对数列极限的概念进行定量分析,并在此基础上进一步剖析其性质及收敛准则.

一、数列极限的概念

1.数列的概念

自变量为正整数的函数 $x_n = f(n)(n=1,2,\cdots)$,将其函数值按自变量 n 由小到大排成的一列数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称其为**数列**,简记为 $\{x_n\}$,其中 x_n 称为数列的**通项**或**一般项**.

例如,数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}(n=1,2,\cdots)$,即 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$;数列 $\{n+1\}(n=1,2,\cdots)$,即 $2,3,4,\cdots,n+1,\cdots$.

若在数列 $\{x_n\}$ 中,存在正整数 M,对任意 n 都有 $|x_n| \leqslant M$,则称数列 $\{x_n\}$ 为**有界数列**,否则称为**无界数列**.数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 是有界数列,数列 $\{n+1\}$ 为无界数列.

2.数列极限的概念

引入案例 在很长一段时间内,人们试图采用各种图形(如矩形、三角形)去近似计算圆的面积.约公元263年我国的数学家刘徽注解《九章算术》时,提出了"割圆术",用圆的内接(或外切)正多边形穷竭的方法求圆面积.

"割圆术"求圆的面积的做法和思路是(见图1-3):先作圆的内接正三角形,把它的面积记作 A_1,再作内接正六边形,其面积记作 A_2,再作内接正十二边形,其面积记作 A_3,…,照此下去,把圆的内接正 $3\times 2^{n-1}(n=1,2,\cdots)$ 边形的面积记作 A_n,这样得到一个数列

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$$

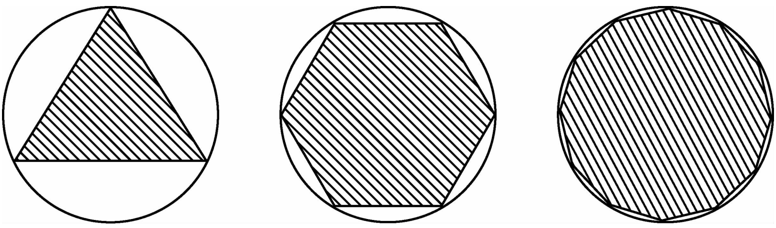

图 1-3

从图形上不难看出:随着圆内接正多边形边数的增加,内接正多边形的面积与圆的面积越来越接近.可以想象,当边数 n 无限增大时,圆的内接正 $3\times 2^{n-1}$ 边形的面

积 A_n 会无限地接近圆的面积 A. 为刻画数列的这种变化趋势，下面引入数列极限的概念.

定义 1　若对于数列 $\{x_n\}$，当 n 无限增大时，数列的通项 x_n 无限接近于常数 A，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A(n\to\infty)$. 若数列 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

有了数列极限的概念，圆的面积 A 可以表示为 $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$，即圆的面积等于圆的内接正 $3\times 2^{n-1}$ 边形的面积所构成的数列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 的极限.

例 1　写出下列数列的前五项，考察其极限.

(1) $x_n = \dfrac{1}{n}$；(2) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$；(3) $x_n = (-1)^{n+1}$；(4) $x_n = 2n+1$.

解　(1) $x_n = \dfrac{1}{n}$，其前五项为：$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}$. 当 n 无限增大（即 $n\to\infty$）时，$\dfrac{1}{n}\to 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$.

这是一个单调递减数列，因为对于每一个正数 n，都有 $x_n > x_{n+1}$.

(2) $x_n = \dfrac{n}{n+1}$，其前五项为：$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}$. 当 n 无限增大（$n\to\infty$）时，$\dfrac{n}{n+1}\to 1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$.

这是一个单调递增数列，因为对于每一个正数 n，都有 $x_n < x_{n+1}$.

(3) $x_n = (-1)^{n+1}$，其前五项为：$1, -1, 1, -1, 1$，其奇数项为 1，偶数项为 -1，当 $n\to\infty$ 时，数列的通项在 1 和 -1 之间来回摆动，这样的数列称为**摆动数列**，我们不能说该数列的极限为 ± 1，这不符合数列极限的定义，所以该数列发散. 如果一个数列有极限，其极限值是唯一的.

(4) $x_n = 2n+1$，其前五项为：$3, 5, 7, 9, 11$. 当 $n\to\infty$，$2n+1\to\infty$，故该数列发散.

通过上述讨论可知：对于数列 $\{x_n\}$ 的极限问题，我们所关心的不仅是它的前几项或每一项如何，而更重要的是研究当 $n\to\infty$ 时，x_n 的变化趋势. 特别是这样一类数列 $\{x_n\}$：当 n 无限增大时，数列的通项 x_n 无限趋近于常数 A，则称 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限. 这句话只是比较直观地描述了极限，这里所说的"无限增大"和"无限趋近"仅是对变量变化状态的定性说明，并没有定量描述，这在理论上无法进行严谨的数学论证.

对极限过程作定量的描述，根本问题在于如何用相对静止的量来描述"无限增大"、"无限趋近"这一运动变化过程. 现以实例说明怎样定量地描述极限.

例如，数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限，容易看到，数列可以写为

$$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{(-1)^n}{n},\cdots$$

当 n 无限增大时,它无限趋近于 0.

所谓"当 n 无限增大时,数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 无限趋近于 0"指的是:当 n 无限增大时,$\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|$ 能够无限变小,怎样进一步定量地描述这个变化过程和结果呢?

若想使 $\frac{(-1)^n}{n}$ 与 0 的接近程度总是小于预先给定的正数 $\frac{1}{10}$,即 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\frac{1}{10}$,这在 n 无限增大过程中总能做到,比如,只要 $n>10$ 即可. 换句话说,在数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 中可以找到某一项,其序号为 N,这里可取第 10 项,从这项以后的所有项:

$$-\frac{1}{11},\frac{1}{12},-\frac{1}{13},\cdots,\frac{(-1)^n}{n},\cdots$$

都满足这个要求.

如果预先给定的正数是 $\frac{1}{100}$,容易看到,这时序号 N 可取 100,即从第 100 项以后的所有项,或写成只要 $n>100$ 时,恒有不等式 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\frac{1}{100}$ 成立.

现在假定预先给定的正数是 $\frac{1}{10\,000}$,可取 $N=10\,000$,只要 $n>10\,000$ 时,恒有 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\frac{1}{10\,000}$,即数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 从 10 000 项之后的所有项与 0 的接近程度都小于预先给定的正数 $\frac{1}{10\,000}$,尽管 $\frac{1}{10\,000}$ 可以认为是"很小",但是还不能说明数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 可以无限地趋近于 0,因为 $\frac{1}{10\,000}$ 仍是一个确定的正数.

因此,为了描述 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 无限趋近于 0,即 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|$ 无限变小,必须对预先任意给定无论怎样小的正数 ε,当 n 无限增大时,总能找到 N,使得当 $n>N$ 时,恒有 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$. 事实上,这是能够做到的,只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 即可,即在数列 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 中,从第 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 项以后所有项都满足要求. 也就是说,只要 $n>N$ 时,恒有 $\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$.

有了上述的说明,就不难理解下面的数列极限的定量描述,即数列极限的

“ε-N”定义.

定义 2　若对于任意给定的正数 ε(不论多么小),总有正整数 N 存在,使得当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n-A|<\varepsilon \tag{1-1}$$

恒成立,则称常数 A 为数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$ 时的**极限**,或者说数列$\{x_n\}$当 $n\to\infty$ 时**收敛**于 A,记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 $x_n\to A(n\to\infty)$.

数列极限的几何解释:将数列 x_n 和极限 A 在数轴上的对应点表示出来,给定正数 ε 后,在数轴上作出点 A 的 ε 邻域$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$(见图 1-4).

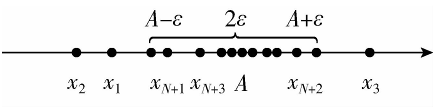

图 1-4

因为不等式$|x_n-A|<\varepsilon$与不等式$A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon$等价,所以当$n>N$时,所有点 x_n 都落在开区间$(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$内,而数列 x_n 中只有有限项落在该区间外. 或者形象地说,在点 A 的无限小的 ε 邻域内,聚集着数列$\{x_n\}$的无穷多个点,所以点 A 也叫数列$\{x_n\}$的**聚点**.

注　① 掌握极限概念的关键在于对正数 ε 二重性的理解. 一方面,ε 必须具有任意性,ε 可以代表任意小的正数,只有这样才能保证数列$\{x_n\}$无限地趋近于 A. 另一方面,ε 必须具有相对固定性,一旦给了 ε,那么它是相对固定的,否则论证工作无法进行.

② 自然数 N 显然依赖于正数 ε,一般地说,所给定的 ε 越小,N 应该越大. 有时为了表示这种关系,就写成 $N(\varepsilon)$,但 N 并不是 ε 的函数. 因为从极限定义可以看出,如果当 $n>N$ 时,(1-1) 式成立,那么对任意一个 $N_1>N$,当 $n>N_1$ 时,(1-1) 式也必然成立,所以说,找到一个 N,就能找到许多 N 满足要求.

例 2　证明数列$\left\{\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}$,即

$$1,0,-\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,-\frac{1}{7},\cdots$$

的极限存在,且其极限为 0.

证　对任意给定的 $\varepsilon>0$,要想使不等式

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}-0\right|=\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$$

成立,则解不等式得

$$n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

因$\frac{1}{\varepsilon}$不一定是正整数,我们可取不超过$\frac{1}{\varepsilon}$的最大整数,即只要取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$即可.

于是,对任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在正整数 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$ 时,恒有 $\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} - 0\right| < \varepsilon$ 成立,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = 0$.

从证明过程可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

例 3 设 $|q| < 1$,证明等比数列 $q,q^2,\cdots,q^n,\cdots$ 的极限是 0.

证 对于任意给定的正数 ε(不妨设 $\varepsilon < 1$),为了使 $|x_n - 0| < \varepsilon$ 成立,即 $|q|^n < \varepsilon$ 成立,只要 $n\ln|q| < \ln\varepsilon$ 成立,因 $|q| < 1$,所以 $\ln|q| < 0$,故有

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

因此,对任给的 $\varepsilon > 0$,取正数

$$N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right].$$

当 $n > N$ 时,恒有 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 成立,故$\lim\limits_{n\to\infty}q^n = 0$.

特别地,当 $q = 1$ 时,数列$\{q^n\}$成为常数数列$\{1\}$,按数列极限定义,显然它的极限是 1;同理,当 $q = -1$ 时,数列$\{q^n\}$是发散的.

注 “ε-N”证法的一般步骤是:

① $\forall\varepsilon > 0$;

② 令$|x_n - A| < \varepsilon$;

③ 推出 $n > \varphi(\varepsilon)$;

④ 取 $N = [\varphi(\varepsilon)]$.

其中关键的一步是由$|x_n - A| < \varepsilon \Rightarrow n > \varphi(\varepsilon)$,找到 $N = [\varphi(\varepsilon)]$,并用定义叙述结论.

例 4 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$.

证 首先建立一个简单但经常使用的不等式:对任一自然数 $n > 1$ 与数 $\beta > 1$,有

$$\beta^n > 1 + n(\beta - 1). \tag{1-2}$$

事实上,设 $\beta = 1 + \lambda(\lambda > 0)$,则有

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \cdots$$

由于未写出的项皆为正数,所以

$$(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda,$$

只要注意到 $\lambda = \beta - 1$,则 $\beta^n > 1 + n(\beta - 1)$ 便得证.

令 $\beta = a^{\frac{1}{n}}(a > 1)$,这时,对任一自然数 $n > 1$,有 $\beta > 1$,则根据不等式(1-2)式或有

$$a > 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1),$$

即有不等式

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{a-1}{n}, \tag{1-3}$$

这就是下面立即要用到的不等式.

(1) 设 $a > 1$,由不等式(1-3)式或可得,对于 $\forall \varepsilon > 0$,总存在 $N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$,只要当 $n > N$ 时,恒有

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon.$$

由数列极限定义可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

(2) 若 $0 < a < 1$,令 $a_1 = \frac{1}{a}$,则 $a_1 > 1$,有

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \left|\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}} - 1\right| = \frac{\left|\sqrt[n]{a_1} - 1\right|}{\sqrt[n]{a_1}} < \left|\sqrt[n]{a_1} - 1\right|.$$

由情形(1)可知,恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

(3) 若 $a = 1$,则 $\sqrt[n]{a} = 1$,显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

根据上述(1)、(2)、(3),故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1(a > 0)$.

二、数列极限的性质

定理 1(唯一性)　若数列 $\{x_n\}$ 有极限,则其极限是唯一的.

证　假设 $\{x_n\}$ 有两个极限 a 与 b,即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

现要证 $a = b$. 由于

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |x_n - a| + |x_n - b|,$$

按极限定义,对于任意的 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$,总存在正整数 N_1,当 $n > N_1$ 时,恒有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

及存在正整数 N_2,当 $n > N_2$ 时,恒有

$$|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

现取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,于是当 $n > N$ 时,有

$$|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leqslant |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因 $|a - b|$ 为非负常数,而 ε 可以任意小,所以只有 $|a - b| = 0$,即 $a = b$.

例 5 证明数列 $x_n = (-1)^n (n = 1, 2, \cdots)$ 是发散的.

证 假设这个数列是收敛的,根据定理 1 知:它有唯一的极限,设极限为 a,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 由数列极限的定义,对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,存在正整数 N,当 $n > N$ 时,$|x_n - a| < \frac{1}{2}$ 成立,即当 $n > N$ 时,x_n 都在开区间 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 内. 但这是不可能的,因为当 $n \to \infty$ 时,x_n 无休止地一再重复取得 1 和 -1 这两个数,而这两个数不可能同时属于长度为 1 的开区间 $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ 内. 因此该数列发散.

定理 2(有界性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛,即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,则数列 $\{x_n\}$ 有界.

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,所以对于给定 $\varepsilon = 1$,总存在正整数 N,当 $n > N$ 时,恒有

$$|x_n - A| < 1,$$

从而,当 $n > N$ 时,有

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| < 1 + |A|.$$

现取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, 1 + |A|\}$,则对一切 n,都有

$$|x_n| \leqslant M.$$

所以,数列 $\{x_n\}$ 有界.

注 收敛数列必有界,但有界数列未必收敛. 如数列 $x_n = (-1)^n (n = 1, 2, \cdots)$ 是有界的,但它却发散.

定理 3(保号性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,且 $A > 0$(或 $A < 0$),则存在正整数 N,当 $n > N$ 时,都有 $x_n > 0$(或 $x_n < 0$).

证 仅证 $A > 0$ 的情况. 按极限定义,取 $\varepsilon = \frac{A}{2}$,总存在正整数 N,当 $n > N$ 时,恒有

$$|x_n - A| < \frac{A}{2},$$

即

$$-\frac{A}{2}<x_n-A<\frac{A}{2},$$

由此得

$$x_n>\frac{A}{2}>0.$$

定理说明：一个数列的极限为正（负）的，则从某项起，以后的所有项也都是正（负）的；反之，若一个数列从某项起，以后的所有项都是正（负）的，则该数列的极限非负（非正），故有下面推论.

推论　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，且存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$），则有 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

定理 4（保序性）　若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且 $A>B$，则存在一个正整数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n>y_n$ 恒成立；反之，若存在正整数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n>y_n$ 恒成立，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则有 $A\geqslant B$.

在无穷数列 $\{x_n\}$ 中，依序取其一部分项构成的无穷数列 $\{x_{n_k}\}$（$n_k\in\mathbf{N}^*$），称为 $\{x_n\}$ 的**子数列**（或**子列**）.

定理 5（子列极限）　数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A 的充要条件是它的任意子列 $\{x_{n_k}\}$（$n_k\in\mathbf{N}^*$）都收敛于 A.

证　充分性是显然的，因 $\{x_n\}$ 也是自身的一个子列. 下证必要性.

因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，所以，$\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

从而当 $k>N$ 时，有 $n_k\geqslant k>N$，有 $|x_{n_k}-A|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n_k}=A$.

推论　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的充要条件是奇、偶子列都收敛于 A.

该推论可用来判断某些数列是发散的. 比如，上面提到的数列 $x_n=(-1)^n$，由于它的奇数项和偶数项的子列收敛于不同的极限，从而可知该数列发散.

三、数列极限的四则运算

本节将在极限定义的基础上，建立数列极限的运算法则. 在很多情况下，利用法则可以不必把一切与极限运算有关的问题都追溯到"极限"定义. 这将简化极限的运算.

定理 6　若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A\cdot B$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}C\cdot a_n=C\cdot A$($C$ 为常数).

上述定理利用数列极限的定义容易证明,留给读者自己练习,这里省略.

例 6 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-5}{n^2-3}$.

解 将$\dfrac{3n^2+2n-5}{n^2-3}$变形,即以 n^2 同除分子、分母得

$$\frac{3n^2+2n-5}{n^2-3}=\frac{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{1-\dfrac{3}{n^2}},$$

由前面的证明已经知道$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-5}{n^2-3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n^2}\right)}=3.$$

例 7 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n-2^{n+1}}$.

解 将$\dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n-2^{n+1}}$变形,即以 3^n 同除分子、分母得

$$\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n-2^{n+1}}=\frac{3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n-2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=3.$$

例 8 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

有读者这样做:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2}\\&=0+0+\cdots+0=0.\end{aligned}$$

你认为上述做法正确吗?

答 上面解法是错误的.原因在于当 $n \to \infty$ 时,数列 $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$ 的项数也趋向无穷,而极限的运算法则:代数和的极限等于极限的代数和只对有限多项成立.因此,求无穷多项和的极限时应当先利用某些求和公式将其变为有限项再继续求解.

正确解法 由自然数求前 n 项和公式得

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

例 9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$,其中 $|x| < 1$.

分析 首先必须明确在这个极限中,自然数 n 是变量,x 是常数且 $|x| < 1$;其次是随着 $n \to \infty$,数列 $a_n = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$ 是无限项的乘积,由于"积的极限等于极限的积"这一法则只对有限个因子成立,故需先用求积公式将其变形.

解 多次利用恒等式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 化简

$$\begin{aligned} a_n &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) \\ &= \frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) \\ &= \frac{1}{1-x}(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) \\ &= \cdots = \frac{1}{1-x}(1-x^{2^{n+1}}). \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时,$2^{n+1} \to \infty$,而 $|x| < 1$,故 $x^{2^{n+1}} \to 0$,从而有

$$\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

注 通过这几个例题可以看到,运用极限的运算法则求极限时,一般都要先进行适当的恒等变形使之符合法则的条件后,再使用法则求极限.

四、数列极限收敛准则

由数列极限的性质可知:有界数列未必有极限,在分析本节例 1 中,数列(1)是一个单调递减数列,且有下界;数列(2)是一个单调递增数列,且有上界.它们都是单调有界数列且都有极限.由这两个例子,我们不由得会想:是否单调有界数列都有极限呢?回答是肯定的.

定理 7　单调有界数列必有极限.

证明略.

例 10　研究数列

$x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots,x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}},\cdots$ 的敛散性,其中 $a>0$.

解　首先证明它是收敛的.从数列的结构来看,它显然是单调递增的,我们来证明它也是有界的.由于 $x_2=\sqrt{a+x_1},x_3=\sqrt{a+x_2},\cdots,x_n=\sqrt{a+x_{n-1}},\cdots$,从而有

$$x_n^2=a+x_{n-1}, \tag{①}$$

因为 $x_n>0$,故有

$$x_n=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n},$$

又因为 $x_n>x_{n-1}$,故有

$$x_n<\frac{a}{x_n}+1.$$

再分析数列的结构可以看出,$\forall\, n\geqslant 1,x_n\geqslant\sqrt{a}$,从而$\dfrac{a}{x_n}\leqslant\sqrt{a}$,所以对每一个正的自然数 n,都有 $x_n<\sqrt{a}+1$.

由上面的证明可知,该数列是单调递增且有上界的数列,根据定理 7 知其必有极限.再进一步来求$\{x_n\}$的极限.不妨设$\{x_n\}$收敛于 l,对 ① 式两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}x_n^2=\lim_{n\to\infty}(a+x_{n-1}),$$

从而得到方程

$$l^2=l+a.$$

因为$\{x_n\}$是正数列,由数列极限的保号性可知,它的极限不能为负数,所以取方程的正根,则

$$l=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

注　本题也可以用数学归纳法证明其单调性和有界性.与自然数有关的命题,用数学归纳法证明往往简捷且有效.

例 11　研究数列 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解　首先证明它是单调增加的.由二项式定理可得

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

同样，有

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

比较上述两个式子可以看出：x_n 的每一项都小于或等于 x_{n+1} 的对应项，而 x_{n+1} 还多了最后一项（大于零），由此可知

$$x_n < x_{n+1} (n = 1, 2, \cdots).$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的.

其次，证明数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

显然有 $\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k} < \frac{1}{2^{k-1}}$，从而

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 由定理 7 可知，数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，用字母 e 表示这个极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

可以证明 e 是一个无理数，$\mathrm{e} = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$. 数 e 无论是在理论研究中还是实际应用中都起着重要作用.

定理 8（夹逼定理）　若数列 $\{x_n\}$ 和数列 $\{y_n\}$ 均为收敛数列，且满足 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则数列 $\{z_n\}$ 一定收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.

证 因$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$,所以$\forall\varepsilon>0$,总存在自然数$N_1>0$,当$n>N_1$时,恒有

$$A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon;$$

也必然存在自然数$N_2>0$,当$n>N_2$时,恒有

$$A-\varepsilon<y_n<A+\varepsilon.$$

现取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$时,恒有

$$A-\varepsilon<x_n\leqslant z_n\leqslant y_n<A+\varepsilon.$$

从而恒有$|z_n-A|<\varepsilon$,故

$$\lim_{n\to\infty}z_n=A.$$

例 12 求数列$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$的极限.

解 由数列的通项可知

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},$$

容易求得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 13 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

分析 当我们无法或不易把无穷多个因子的积变为有限时,也可以考虑利用夹逼准则.

解 因为

$$0\leqslant\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}\leqslant\frac{1}{n},$$

不等式两端均以 0 为极限,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

注 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$说明幂指函数比阶乘函数的增长速度快.同样的方法可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0(a>0),$$

这说明阶乘函数的增长速度比指数函数快.当$n\to\infty$时,常见数列函数增长速度由慢到快顺序如下:$n,a^n,n!,n^n$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n^n}=0$,其中$a>0$.

思考

(1) 怎样定义数列$\{x_n\}$不以常数A为极限(即数列极限的否定形式)?

(2) 设$x_1=1,x_{n+1}=-x_n,n=1,2,3,\cdots$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

有读者这样解这道题:设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,对式子$x_{n+1}=-x_n$两边同时取极限得,

$$A=-A,$$

解之得$A=0$.你认为这样做对吗?

习题 1-2

(1) 回答下列问题(可举例说明).

① 如果当n无限增大时,数列$\{a_n\}$越来越接近a,那么$\{a_n\}$是否一定收敛于a?

② 设常数a的无论怎样小的ε邻域内都密集着数列$\{a_n\}$的无穷多个点,那么$\{a_n\}$是否一定收敛于a?

③ 有界数列是否一定收敛?无界数列是否一定发散?

④ 单调数列是否一定收敛?摆动数列是否一定发散?

(2) 观察下列数列的极限是否存在?若存在,写出其极限.

① $x_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$;　　② $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2^n}$;

③ $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$;　　④ $x_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

(3) 利用数列极限定义证明.

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1}=1$;　　② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right)=2$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$;　　④ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}=0$.

(4) 对于数列x_n,若$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$,$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(5) 求极限.

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{1+y+y^2+\cdots+y^{2n}}$,其中$|x|<1,|y|<1$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}(0<a<b)$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

(6) 设$a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$,且$a_k>0(k=1,2,\cdots,m)$,求

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}.$$

(7) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$.

第三节　函数的极限

上一节讨论了数列的极限,由于数列是一种特殊的函数,即定义在正整数集上的函数 $x_n=f(n)$. 因而,数列有两个基本特点:一是自变量 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的变化是间断的(跳跃的);二是 n 无限制地增大. 在生产和科学技术中,所讨论的自变量往往是连续变化的并且绝对值无限增大或自变量趋近于某一点时函数的变化趋势,这就是本节要学习的函数的极限问题.

一、函数极限的定义

1. 当自变量绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 的极限

设 $f(x)$ 为定义于无限区间上的函数,所谓 x 的绝对值无限增大,包括如下三种情形:

(1) x 取正值无限增大,记作 $x\to+\infty$.

(2) x 取负值而 $|x|$ 无限增大,记作 $x\to-\infty$.

(3) x 不限定正负而 $|x|$ 无限增大,记作 $x\to\infty$.

考察函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$,从图 1-5 中可以看出,当 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 无限趋近于常数 1,此时称 1 为函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限.

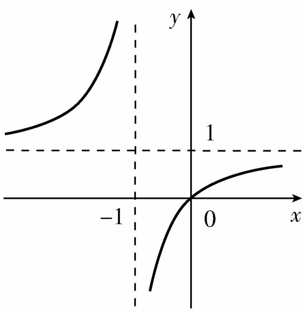

图 1-5

当 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限与当 $n\to\infty$ 时数列 $f(n)$ 的极限十分类似，所不同的只是自变量 $x\to+\infty$ 与 $n\to\infty$ 的方式不同：x 是连续地趋于 $+\infty$，而 n 是间断地趋于 ∞. 因此，它们的极限定义也极为类似，只需把数列极限中的"存在正整数 N"用"存在正数 M"来代替，当"$n>N$ 时"用"当 $x>M$ 时"来代替，就可得下述定义.

定义 1　设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a,+\infty)$ 上，且存在常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 M，当 $x>M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的**极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

关于 $x\to-\infty$ 时函数极限的定义，可仿照定义 1 给出.

定义 2　设函数 $f(x)$ 定义在区间 $(-\infty,a)$ 上，且存在常数 A，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 M，当 $x<-M$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的**极限**，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

为了准确描述函数 $f(x)$ 当 x 的绝对值无限增大时的变化情况，我们给出函数极限的"ε-M"定义.

定义 3　如果对于任意给定的正数 ε(不论多么小)，总存在一个正数 M，使得当 $|x|>M$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的**极限**为 A，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的几何解释如下：

对于给定的正数 ε，作两条平行线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$，总有一个正数 M 存在，当 $x\in(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$ 时，$y=f(x)$ 的图形全部落在这两条平行线之间(见图 1-6).

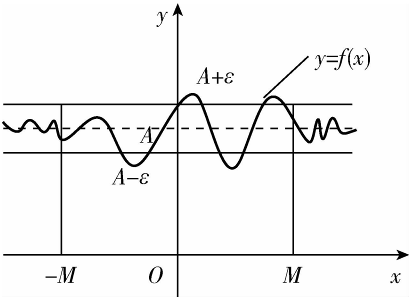

图 1-6

读者可仿照定义3给出 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时函数极限的"ε-M"定义的几何解释.

例 1 用定义证明 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$.

证 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$($\forall \varepsilon > 0$),欲使

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon,$$

应有

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| < \varepsilon,$$

而欲使 $\dfrac{2}{x+1} < \varepsilon$ 成立,只需 $x > \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$ 即可. 于是对于任意给定的 $\varepsilon > 0$(不妨设 $\varepsilon < 1$),总存在正数 $M = \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$($\exists M > 0$,且 $M = \varphi(\varepsilon)$),当 $x > M$ 时,恒有

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$.

例 2 证明 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

证 由于 $\left| \dfrac{\sin x}{x} - 0 \right| = \left| \dfrac{\sin x}{x} \right| \leqslant \dfrac{1}{|x|}$,所以对任意给定的正数 ε,要使 $\left| \dfrac{\sin x}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ 成立,只要 $\dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$ 成立,即 $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

因此,对于任意给定的正数 ε,存在 $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$,当 $|x| > M$ 时,恒有 $\left| \dfrac{\sin x}{x} - 0 \right| < \varepsilon$ 成立. 这就证明了 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

注 "ε-M"证法的一般步骤是:

① $\forall \varepsilon > 0$;

② 令 $|f(x) - A| < \varepsilon$;

③ 推出 $|x| > \varphi(\varepsilon)$;

④ 取 $M = \varphi(\varepsilon)$.

其中关键的一步是由

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow |x| > \varphi(\varepsilon),$$

找到 $M = \varphi(\varepsilon)$,并用定义叙述结论.

利用定义不难推出如下定理成立.

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

例 3　考察函数 $f(x)=\arctan x$，当 $x\to\infty$ 时的极限.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以由定理 1 可知：$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 当自变量趋向于某一点时，函数 $f(x)$ 的极限

例 4　考察函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 的极限.

从图 1-7 中可以看出，当 x 无限趋近于 1，即当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 4，此时称当 x 趋近 1 时，函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 的极限为 4.

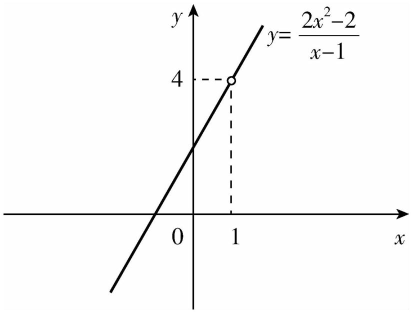

图 1-7

我们对这个例子再作进一步分析：

所谓"x 无限趋近于 1"，就相当于 x 与 1 的距离 $|x-1|$ 无限地减小，且注意 $x\neq 1$，即

$$0<|x-1|\to 0.$$

所谓"函数 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 4"就相当于 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 与 4 的距离 $\left|\dfrac{2x^2-2}{x-1}-4\right|$ 无限地减小，即

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|\to 0.$$

而$\left|\dfrac{2x^2-2}{x-1}-4\right|$无限趋近于0的程度,是由$|x-1|$无限趋近于0的程度所决定的,如欲使

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|=2|x-1|<\frac{1}{10},$$

只要$0<|x-1|<\dfrac{1}{20}$就可以.

如果预先给定的是$\dfrac{1}{100}$,欲使

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|=2|x-1|<\frac{1}{100},$$

只要$0<|x-1|<\dfrac{1}{200}$就可以.

一般情况,对于任意给定的$\varepsilon>0(\forall\varepsilon>0)$,欲使

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|=2|x-1|<\varepsilon,$$

只要$0<|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$就可以.

这就是说,对于任意给定的$\varepsilon>0(\forall\varepsilon>0)$,总能找到正数$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}(\exists\delta>0$,且$\delta=\varphi(\varepsilon))$,当$0<|x-1|<\delta$时,恒有

$$\left|\frac{2x^2-2}{x-1}-4\right|<\varepsilon.$$

由此可概括出函数在一点的极限定义如下.

定义4 设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义,如果对于任意给定的正数ε(不论多么小),总存在一个正数δ,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称当$x\to x_0$时,$f(x)$的**极限**为A,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(x\to x_0).$$

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的几何解释如下:

对于任意给定的正数ε,作两条平行线$y=A-\varepsilon$和$y=A+\varepsilon$,总有一个正数δ存在,当$0<|x-x_0|<\delta$,即$x_0-\delta<x<x_0+\delta$时,$y=f(x)$的图形全部落在这两条平行线之间(见图1-8).

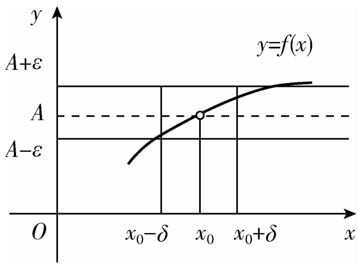

图 1-8

注　① 在极限定义中,要求 $|x-x_0|>0$ 是为了去掉 $x=x_0$ 的情形.因函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处是否有定义并不影响函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时是否有极限.比如,例 4 中的函数 $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义,但当 $x\to 1$ 时,其极限为 4,所以定义中的 $0<|x-x_0|<\delta$,不能写成 $|x-x_0|<\delta$.

② δ 是由给定的 ε 和不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 来确定的,故 δ 与 ε 有关,且 ε 越小 δ 就越小.有时为了表示这种依赖关系,就写成 $\delta(\varepsilon)$,但是 δ 的值不是唯一的(若 δ 满足要求,则比 δ 小的任何正数都满足要求).

③ 由定义求函数极限时,常常先限定自变量 x 的变化范围:$|x-x_0|<\delta_0$.由于我们考察的是:当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势,所以点 x_0 邻域 $(x_0-\delta_0,x_0+\delta_0)$ 之外,函数 $f(x)$ 的变化是无关紧要的.

例 5　证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

证　由于 $|f(x)-1|=2|x-1|$,对于任意给定的正数 ε,要使 $|f(x)-1|<\varepsilon$ 成立,只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立.所以,对于任意给定的正数 ε,存在正数 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-1|<\varepsilon$ 成立,故 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

例 6　求证 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\,(a>0)$.

证　由于

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}},$$

所以,对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在正数 $\delta=\sqrt{a}\varepsilon$,当 $0<|x-a|<\sqrt{a}\varepsilon$ 时,恒有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}\,(a>0)$.

用类似的方法可以证明更一般的结果：

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}\ (a>0,n\in\mathbf{N}^*).$$

注 “ε-δ”证法的一般步骤是：

① 将$|f(x)-A|$化简或适当放大成

$$|f(x)-A|\leqslant\varphi(|x-x_0|);$$

② $\forall\varepsilon>0$，令$\varphi(|x-x_0|)<\varepsilon$，解得 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$；

③ 取$\delta=\delta(\varepsilon)$ 或 $\delta=\min\{1,\delta(\varepsilon)\}$ 等；

④ 用“ε-δ”语言叙述结论.

其中关键的一步是“瞄准”式子$|x-x_0|$，由

$$|f(x)-A|\leqslant\varphi(|x-x_0|)<\varepsilon\Rightarrow|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$$

找到δ.有时为了找δ，还要辅以放大不等式，先不妨设$|x-x_0|<1$等技巧.

3. 单边极限

在定义4中，所谓的“$x\to x_0$”指的是x从x_0的左、右两侧趋近于x_0，我们把$f(x)$在点x_0的极限称为**双边极限**.但在有些问题中，往往只需要考虑x从x_0的一侧趋近于x_0时，函数$f(x)$的变化趋势，我们把$f(x)$在点x_0的一侧趋近于x_0时的极限称为**单边极限**.

定义5 设函数$f(x)$在x_0的左侧有定义，如果当x从x_0的左侧($x<x_0$)趋近于x_0(记为$x\to x_0^-$)时$f(x)$以A为极限，即如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正数δ，使得当$0<x_0-x<\delta$(或$x_0-\delta<x<x_0$)时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**左极限**，记为

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\ 或\ f(x)\to A(x\to x_0^-).$$

类似地有下面的定义.

定义6 设函数$f(x)$在x_0的右侧有定义，如果当x从x_0的右侧($x>x_0$)趋近于x_0(记为$x\to x_0^+$)时$f(x)$以A为极限，即如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正数δ，使得当$0<x-x_0<\delta$(或$x_0<x<x_0+\delta$)时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的**右极限**，记为

$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\ 或\ f(x)\to A(x\to x_0^+).$$

为了精确描述函数$f(x)$当x无限趋近于某一点(即$x\to x_0$)时的变化情况，我们给出函数极限的“ε-δ”定义.

由双边极限及单边极限的定义不难推出，函数$f(x)$在点x_0的极限与函数$f(x)$

在点 x_0 的左、右极限有如下关系.

定理 2　双边极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在的充分必要条件是两个单边极限存在且相等,即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

这个定理常用来判断分段函数在分段点处的极限是否存在.

例 7　判断函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x>0,\\ 1+x, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否有极限?

解　计算函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1,$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$,所以由定理 2 可知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$,即函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限存在.

例 8　研究符号函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 的极限.

解　由符号函数的定义,显然有

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}1=1,$$

由定理 2 可知,$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}x$ 不存在.

以上数列的极限、函数的极限描述的都是当自变量在某一变化过程中数列函数的变化趋势,因此,在自变量的以下各种变化过程:

$$n\to\infty, x\to-\infty, x\to+\infty, x\to\infty, x\to x_0, x\to x_0^-, x\to x_0^+,$$

其极限定义可以统一如下.

定义 7　如果因变量 Y 在自变量的某一变化过程中,无限趋近于某一常数 A,则称 A 为变量 Y 的**极限**,简记为 $\lim Y=A$ 或 $Y\to A$.

利用极限的精确定义证明极限时,有关"ε"的特性和"N,M,δ"的寻找方法,本书不再详细介绍,有兴趣的读者可参看数学分析有关教材和参考书.

二、函数极限的性质

类似于数列极限的性质,函数极限有如下性质.

定理 3(有界性定理)　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,则必存在 x_0 的某一邻域,使得函数 $f(x)$ 在该邻域内有界,即存在正数 M 和 δ,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,有

$$|f(x)| \leqslant M.$$

证　按极限定义,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,总存在 $\delta > 0$,使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

又因 $|f(x)| - |A| \leqslant |f(x) - A|$,故有 $|f(x)| - |A| < \varepsilon$,即 $|f(x)| < |A| + \varepsilon$. 取 $M = |A| + \varepsilon$,于是,定理 3 就获得证明.

定理 4(局部保号性)　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且 $A > 0$(或 $A < 0$),则存在常数 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,都有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

证　下面只证 $A > 0$ 的情形. 按极限定义,对于 $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$,存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $|f(x) - A| < \dfrac{A}{2}$,即 $-\dfrac{A}{2} < f(x) - A < \dfrac{A}{2}$,从而有 $f(x) > \dfrac{A}{2} > 0$.

由上面的定理证明可以看出,只需把数列极限的“ε-N”叙述,恰当地改为函数极限的“ε-δ”叙述,就可把数列的极限定理改为函数极限相应的定理. 下面只把定理写出,其证明可模仿数列情形改述,留作练习.

定理 5(唯一性定理)　如果函数 $f(x)$ 在某一变化过程中有极限,则其极限是唯一的.

思考

(1) 当 $f(x)$ 在点 a 处无定义时,极限 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 必不存在. 这种说法对吗?

(2) 你能给出函数极限的“ε-δ”定义的否定形式吗?

习题 1-3

(1) 观察下列函数的极限是否存在?若存在,求出其极限.

① $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$;　　② $\lim\limits_{x \to +\infty}(1 - \mathrm{e}^{-x})$;

③ $\lim\limits_{x \to -\infty}(1 - 2\mathrm{e}^{x})$;　　④ $\lim\limits_{x \to \infty}\sin\dfrac{1}{x}$;

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$；　　⑥ $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$；

⑦ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cot x$；　　⑧ $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})$.

(2) 利用函数极限的定义证明.

① $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$；　② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x}=3$；　③ $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

(3) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 1,\\ 3x-1, & x<1,\end{cases}$$

求：当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)$ 的左、右极限，并说明函数当 $x\to 1$ 时极限是否存在？

(4) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ 2+x, & 0<x<1,\\ x^2+2 & x>1,\end{cases}$$

讨论函数在 $x\to 0$ 和 $x\to 1$ 时的极限是否存在？若存在，求出其极限.

第四节　无穷小与无穷大 函数极限的运算法则

前面讲的是自变量取各种变化方式时函数的极限，这一节把函数的极限值 A 推广到 ∞，并重点讨论一种极限值 A 为 0 的变量，因这种变量在数学史上曾起过重要的作用. 比如，曾有人推出这样一个谬论：圆的周长 l 可定义为其内接正 n 边形周长当边数 n 无限增多时的极限，由于 $n\to\infty$ 时，边长 $a_n\to 0$，于是正 n 边形的周长 $na_n\to 0$，从而一切圆周长 $l=0$. 显然，结论是错误的. 那么，你知道产生这种错误的根源是什么吗？要弄清楚这个问题，首先必须了解两个特殊的变量：一个以 0 为极限，另一个以 ∞ 为极限，即无穷小与无穷大.

一、无穷小与无穷大

1. 无穷小的概念

定义 1　极限为 0 的变量称为**无穷小量**，简称**无穷小**，即若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷小.

例 1 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = \sin x$ 的极限为 0，所以称函数 $\sin x$ 为当 $x \to 0$ 时的无穷小，记为 $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ 或 $\sin x \to 0(x \to 0)$.

当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^2}$ 都是无穷小.

当 $x \to \dfrac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x) = \sin x$ 的极限不为 0，所以当 $x \to \dfrac{\pi}{2}$ 时，函数 $\sin x$ 不是无穷小.

注 ① 无穷小是以 0 为极限的变量，不能将其与很小的常数相混淆. 在所有的常数中，0 是唯一可以看作无穷小的数，这是因为如果 $f(x) \equiv 0$，则 $\lim f(x) = 0$.

② 同时也要注意无穷小与自变量的变化过程有关. 当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 是无穷小，但当 $x \to x_1(x_1 \neq x_0)$ 时，$f(x)$ 不一定还是无穷小.

2. 无穷小的性质

由无穷小的概念不难得出无穷小有如下 3 个性质：

(1) 有限个无穷小的和仍为无穷小.

(2) 有限个无穷小的积仍为无穷小.

(3) 有界函数与无穷小的积仍为无穷小，特别地，常数与无穷小的积仍为无穷小.

注 性质(1) 和(2) 可以推广到有限个无穷小的运算；性质(3) 在求极限时常会用到.

例 2 求 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

解 因为当 $x \to 0$ 时，x^2 为无穷小，而 $\left|\sin \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$ 为有界函数，所以当 $x \to 0$ 时，$x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x}$ 仍为无穷小，即 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

无穷小与函数极限之间有着重要的关系，这一关系在微积分的某些定理的证明中起着重要作用.

定理 1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$，$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

证 必要性 由极限定义，对于任意给定的正数 ε，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 令 $\alpha(x) = f(x) - A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$，于是 $f(x) = A + \alpha(x)$.

充分性 由极限定义，对于任意给定的正数 ε，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|\alpha(x)| < \varepsilon$ 成立，即 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立，于是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

对于 $x \to \infty$ 时的情形，可证明有类似的结论，由读者自己叙述定理并完成其证明.

3. 无穷大的概念

在某种意义下，和无穷小相反的一种变量就是无穷大.

定义 2　在自变量 x 的某一变化过程中，若函数的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为此变化过程中的**无穷大量**，简称**无穷大**.

例 3　当 $x \to 2$ 时，函数 $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ 为无穷大.

注　① 无穷大是指绝对值无限增大的变量，不能将其与很大的常数相混淆，一个数无论多大都不是无穷大.

② 无穷大包括两个方向的无穷大，即正无穷大($+\infty$)和负无穷大($-\infty$). 例如，当 $x \to 0^+$ 时，$\ln x \to -\infty$，即 $x \to 0^+$，$\ln x$ 为无穷大，且为负无穷大($-\infty$).

③ 无穷大是极限不存在的情形，这里借用了极限符号，但并不表示极限存在.

④ 说一个量是无穷大，同样要指出自变量的变化过程.

例 4　函数 $f(x) = x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是否有界？又当 $x \to +\infty$ 时，该函数是否为无穷大？为什么？

解　$f(x) = x\cos x$ 在$(-\infty, +\infty)$内无界. 因为，$\forall M > 0$，在$(-\infty, +\infty)$内总能找到 $x = 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$，使得

$$|f(x)| = |2k\pi\cos 2k\pi| = |2k\pi| > M,$$

只需 $|k| > \dfrac{M}{2\pi} (k \in \mathbf{Z})$ 即可. 但 $f(x) = x\cos x$ 当 $x \to +\infty$ 时却不是无穷大. 只需举一反例即可说明. 例如，取 $x_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$，当 $n \to \infty$ 时，有 $x_n \to +\infty$，此时

$$f(x_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

这说明该函数当 $x \to +\infty$ 时不是无穷大.

注　无界量与无穷大是两个不同的概念. 对于任意给定的正数 M，无穷大要求对于一切 $x > X$(或 $|x| > X$，$0 < |x - x_0| < \delta$ 等)，皆有 $|f(x)| > M$；而无界量只需找到某个这样的 x 有 $|f(x)| > M$ 即可.

4. 无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中，无穷小与无穷大互为倒数关系. 例如，当 $x \to 1$ 时，$x - 1$ 是无穷小，而 $\dfrac{1}{x-1}$ 为无穷大；再如，当 $x \to \infty$ 时，x^2 为无穷大，而 $\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷小. 一般地，我们有如下定理.

定理2 无穷小与无穷大互为倒数关系,即在自变量x的某一变化过程中,若函数$f(x)$为无穷小且$f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大;反之,若$f(x)$为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小.

例5 考察函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$和$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x+1}{x^2-1}$当$x\to 1$时的变化情况.

解 因为当$x\to 1$时,$\dfrac{x^2-1}{x+1}\to 0$,即$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$,所以$f(x)$是$x\to 1$时的无穷小.那么$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x+1}{x^2-1}$则为$x\to 1$时的无穷大.

例6 研究函数$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$在点$x=0$的极限.

解 由无穷小与无穷大互为倒数关系,不难得出

$$\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0,\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$不存在.

现在我们来回答本节开篇所提出的问题.产生错误的根源是把"无限个无穷小之和"错当成"有限个无穷小之和"了.由无穷小的性质可知,有限多个(哪怕是1亿个)无穷小之和仍为无穷小;但无限多个无穷小之和$na_n(a_n\to 0,n\to\infty)$即"$0\cdot\infty$"就不一定是无穷小了.例如,$n\to\infty$时,$\dfrac{1}{n}$是无穷小,即$\dfrac{1}{n}\to 0$,但$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}$(共$n$个)$=n\cdot\dfrac{1}{n}\to 1(n\to\infty)$.所以,读者在以后的计算或推理中,不要把有限数$a$的一些运算法则随便搬到无穷小与无穷大的运算中来.例如,$\dfrac{a}{a}=1,a-a=0,0\cdot a=0$;但"$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$"不一定为1,"$\infty-\infty,0\cdot\infty$"也不一定为0.本题中错在"$na_n\to 0$",因为在$na_n$中,当$n\to\infty,a_n\to 0$时是"$0\cdot\infty$"型未定式(将在第三章第二节中讲到).

二、函数极限的运算法则

1.函数极限的四则运算法则

定理3 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x)=C\cdot A$($C$ 为常数).

证 由定理 1 知:因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则有

$$f(x)=A+\alpha(x),\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$$

$$g(x)=B+\beta(x),\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

(1) $[f(x)\pm g(x)]=A\pm B+[\alpha(x)\pm\beta(x)]$,由无穷小的性质得,$\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha(x)\pm\beta(x)]=0$. 再由定理 1 即得 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$.

(2) $f(x)\cdot g(x)=A\cdot B+(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)$,由无穷小的性质得,

$$\lim_{x\to x_0}(A\beta+B\alpha+\alpha\beta)=0,$$

再由定理 1 即得 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$.

(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A+\alpha}{B+\beta}=\dfrac{A}{B}+\dfrac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}$,由无穷小的性质得,$\lim\limits_{x\to x_0}(B\alpha-A\beta)=0$. 由本定理结论(2)可知:$\lim\limits_{x\to x_0}B(B+\beta)=B^2$,可以证明:$\dfrac{1}{B(B+\beta)}$ 当 $x\to x_0$ 时是有界函数. 所以,由无穷小的性质得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}=0$. 再由定理 1 即得 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

(4) 在(2)中令 $g(x)=C$ 即可得证.

定理 3 中的(1)和(2)可推广到有限多个函数的情形,即有

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\pm\lim_{x\to x_0}f_2(x)\pm\cdots\pm\lim_{x\to x_0}f_n(x);$$

$$\lim_{x\to x_0}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\cdots\cdot f_n(x)]=\lim_{x\to x_0}f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0}f_2(x)\cdot\cdots\cdot\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

以上结论仅就 $x\to x_0$ 时加以叙述,对于自变量的其他变化过程同样成立. 请读者自己给出.

例 7 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+5x-2)$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+5x-2)=\lim\limits_{x\to 2}3x^2+\lim\limits_{x\to 2}5x-\lim\limits_{x\to 2}2=20$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-1}{2x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)}=\dfrac{2}{3}$.

例 8 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$.

分析 因为分母的极限为 0,不能直接利用商的极限法则,注意到分子的极限也为 0,这是分子分母的极限都是 0 的情形,称其为“$\dfrac{0}{0}$”型. 此时,可首先分解因式,约

去使分子、分母为 0 的因子,然后再求极限.

解 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+3x+9}{x+3}=\dfrac{9}{2}$.

例 9 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

分析 这是"$\dfrac{0}{0}$"型. 可首先分子有理化,约去使分子、分母为 0 的因子,然后再求极限.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+4-4}{(\sqrt{x+4}+2)x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.

例 10 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin2x}{\sin x}$.

分析 这是"$\dfrac{0}{0}$"型. 可首先使用倍角公式把分子展开,约去使分子、分母为 0 的因子,然后再求极限.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\sin x\cos x}{\sin x}=6\lim\limits_{x\to0}\cos x=6$.

例 11 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x^2-1}{5x^4+1}$.

分析 当 $x\to\infty$ 时,分子、分母都是无穷大,不能直接利用商的极限法则,此时可首先将分子、分母同除以自变量的最高次幂,然后再求极限.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+2x^2-1}{5x^4+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{1}{x}\right)^4}{5+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4}=\dfrac{2}{5}$.

一般地,对于有理函数(即两个多项式函数的商)的极限,有下面的结论:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\infty, & \text{当 } m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n,\\ 0, & \text{当 } m>n,\end{cases}$$

其中 $a_0\neq0,b_0\neq0$.

例 12 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^4+1}$.

解 分子、分母同除以自变量的最高次幂 x^4,即得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-1}{x^4+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\dfrac{1}{x}\right)+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\left(\dfrac{1}{x}\right)^4}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4}=0.$$

例 13　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^2+1}$.

解法 1　利用上面的结论,即得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^2+1}=\infty$.

解法 2　先考察极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^3+x^2-1}$.利用上面的结论,故此极限为 0.再利用无穷大与无穷小的关系得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x^2+1}=\infty$.

2.复合函数的极限运算法则

定理 4　设由函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$ 所构成的复合函数 $f[\varphi(x)]$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且在 x_0 的一个邻域内(除 x_0 外),$\varphi(x)\neq u_0$,则有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

以上定理当 $x\to\infty$ 时同样成立.

例 14　求$\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{x-1}}$.

解　因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$,而$\lim\limits_{u\to 2}\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^2$,所以$\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^{\frac{x^2-1}{x-1}}=\mathrm{e}^2$.

例 15　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\arctan x)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)=\dfrac{\pi}{2}$,而$\lim\limits_{u\to\frac{\pi}{2}}\sin u=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\arctan x)=1$.

思考

(1) 极限定义中的“ε”是否为无穷小?

(2) 能否说无穷小是比零大且比任何正数都小的数?而无穷大是比任何正数都大的数?

习题 1-4

(1) 回答下列问题(可举例说明).

① 在自变量的某变化过程中,函数 $f(x)$ 的极限为 A(即 $f(x)\to A$) 与 $f(x)$ 存在极限 A 是否是一回事?

② 在自变量的某变化过程中,函数 $f(x)$ 有极限,$g(x)$ 无极限,$f(x)+g(x)$ 是否必无极限?

③ 有界变量与无穷大乘积一定是无穷大吗?

④ 无穷大必为无界函数,无界函数必为无穷大,这句话对吗?

(2) 请指出下列函数何时为无穷小?何时为无穷大?

① $y=2x^2$;　② $y=\sqrt[3]{x+1}$;

③ $y=\dfrac{2}{x}$;　④ $y=\dfrac{x^2}{x}$;

⑤ $y=0$;　⑥ $y=x+1$;

⑦ $y=\dfrac{1}{x-2}$;　⑧ $y=\dfrac{x-1}{x+1}$;

⑨ $y=\tan x$;　⑩ $y=\ln x$.

(3) 利用定义证明:函数 $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ 当 $x\to-3$ 时为无穷小;当 $x\to\infty$ 时为无穷大.

(4) 证明:函数 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界,但这个函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

(5) 计算下列极限.

① $\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+5x-1)$;　② $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-1}{x^4+2x^2}$;

③ $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$;　④ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x+2}$;

⑤ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+1}$;　⑥ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x-1}$;

⑦ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$;　⑧ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1+x^2}}$;

⑨ $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;　⑩ $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

⑪ $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$;　⑫ $\lim\limits_{x\to0}x^3\cos\dfrac{1}{x}$;

⑬ $\lim\limits_{x\to1}\ln\sin\dfrac{\pi x}{2}$;　⑭ $\lim\limits_{x\to\infty}\sin e^{-x^2+1}$.

(6) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$,求 a,b 的值.

(7) 已知 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$,当 $x\to\infty$ 时,p,q 取何值时,$f(x)$ 为无穷小?p,q 取何值时,$f(x)$ 为无穷大?

(8) 求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to0}(3x^2+5x)\sin\dfrac{1}{2x}$;　② $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan 6x}{7x^2-9}$.

第五节　极限的存在准则 两个重要极限

在本章第二节中，我们已经学习了数列极限的收敛准则，现在，类似地给出函数极限存在的一条准则，然后证明两个重要极限.

一、函数极限的存在准则

定理(夹逼定理)　如果对于 x_0 的某去心邻域内的一切 x 有 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

* **证**　设 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，有

$$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x). \tag{①}$$

对任意给定的小正数 ε，因为 $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，故存在 $\delta_2 > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，恒有 $|h(x) - A| < \varepsilon$ 成立，即

$$A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon. \tag{②}$$

又因为 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，故存在 $\delta_3 > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta_3$ 时，恒有 $|g(x) - A| < \varepsilon$ 成立，即

$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon. \tag{③}$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，①、②、③ 式同时成立，则有

$$A - \varepsilon < h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x) < A + \varepsilon.$$

从而有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 这就证明了 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

夹逼定理同样适用于 $x \to \infty$ 的情形.

二、两个重要极限

作为函数极限的夹逼定理的应用，下面来证明第一个重要极限.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

证　当 $x \to 0$ 时，$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 的极限不能用商的运算法则来计算. 为证明这个极限，先设 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，作一单位圆如图 1-9 所示，令 $\angle AOB = x$，过 A 点作切线 AC，那么 $\triangle AOC$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\tan x$，扇形 AOB 的面积为 $\dfrac{1}{2}x$，$\triangle AOB$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\sin x$，因

为扇形的面积介于两个三角形面积之间,所以

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x, \text{即 } \sin x < x < \tan x.$$

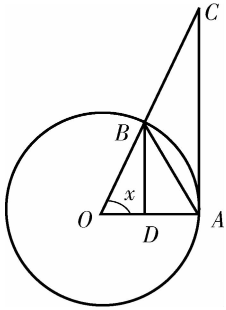

图 1-9

因为 $\sin x > 0$,用 $\sin x$ 除上式两端得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

即 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. 因为$\frac{\sin x}{x}$与 $\cos x$ 都是偶函数,所以当 x 取负数时上式也成立,因而当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$,$\lim\limits_{x\to 0}1 = 1$,因此,由函数极限的夹逼定理得第一个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

此极限本质上为

$$\lim_{\bigcirc\to 0}\frac{\sin\bigcirc}{\bigcirc} = 1,$$

式中的“$\bigcirc$”代表同一个无穷小.

注　该极限是“$\frac{0}{0}$”型. 例如,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x = 0$,其虽然与重要极限形式上近似,但本质却不同;而$\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1\left(令\frac{1}{x} = t\right)$与重要极限形式上虽不同,但本质却相同.

例 1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\dfrac{2}{3}$.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=1$.

例 3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

例 4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

例 5　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{2x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 3x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin 4x\sin x}{2x^2}=-4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=-4$.

例 6　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 2x}{\sin 4x}$.

解　设$t=x-\dfrac{\pi}{2}$,则$x=t+\dfrac{\pi}{2}$,当$x\to\dfrac{\pi}{2}$时,$t\to 0$,故有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{\sin 4x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2(t+\dfrac{\pi}{2})}{\sin 4(t+\dfrac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t}{\sin 4t}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t}{2t}\cdot\frac{4t}{\sin 4t}=\frac{1}{2}.$$

注　只有当 $\bigcirc\to 0$ 时,才有$\dfrac{\sin\bigcirc}{\bigcirc}\to 1$,$\dfrac{\tan\bigcirc}{\bigcirc}\to 1$. 对本例,有的读者这样做:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{\sin 4x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}=\frac{1}{2}.$$

虽然结果恰巧一致,但做法是完全错误的.

例 7　求$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin x\right)^2}{1-x}$.

分析 极限中含有反三角函数,变形不方便,故先作变量替换将其转化为三角函数,再利用重要极限.

解 令$\frac{\pi}{2}-\arcsin x = t$,则 $x=\cos t$,故有

$$原式=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{1-\cos t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2}{2\sin^2\frac{t}{2}}=2.$$

例 8 求$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

分析 首先,在这个极限过程中,n 是变量,x 是常数;其次,对于无穷多个因子的积的极限,应当先求其积,再求极限.

解 当 $x=0$ 时,$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=1$;当 $x\neq 0$ 时,$\sin\frac{x}{2^n}\neq 0$,多次使用倍角公式 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$,则有

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}},$$

注意到 $n\to\infty$ 时,$\frac{x}{2^n}\to 0$,$\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}\to 1$,所以

$$原式=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

在本章第二节中,已证明了数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

下面先证明 $x\to+\infty$ 的情形.

证 对于任何正实数 x,总可以找到正整数 n,使得 $n\leqslant x<n+1$,当 $x\to+\infty$ 时,有 $n\to\infty$,因为

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n},$$

所以,有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}.$$

所以，由夹逼定理可得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

对于 $x\to-\infty$ 的情形，令 $x=-(t+1)$，当 $x\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}&=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}\\&=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

综上所述，可得第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

此极限本质为

$$\lim_{\bigcirc\to\infty}\left(1+\frac{1}{\bigcirc}\right)^{\bigcirc}=\mathrm{e},$$

式中的“○”代表同一个无穷大.

注　该极限是“1^{∞}”型. 例如，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，其与第二个重要极限虽形式上不同，但本质却相同.

例 9　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

例 10　求 $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 11　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\mathrm{e}\cdot1=\mathrm{e}$.

注　有些函数虽然不是“1^{∞}”型，但是可以通过适当地变形化为该形式.

例 12　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解 令 $e^x-1=u,x=\ln(1+u)$,当 $x\to 0$ 时,$u\to 0$,于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=1.$$

例 14 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^{x+1}$.

解法 1 观察发现,属于"1^{∞}"型,应将其化成重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 的形式,故有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right]^5\cdot\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^2=e^5.$$

解法 2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)=\dfrac{e^4}{e^{-1}}=e^5.$

例 15 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}$.

解 因其属于"1^{∞}"型,所以,首先将其化成重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 的形式,故有

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\csc^2 x}=\lim_{x\to 0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{(\cos x-1)\cdot\csc^2 x},$$

而

$$\lim_{x\to 0}(\cos x-1)\csc^2 x=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=-\frac{1}{2},$$

所以,原式 $=e^{-\frac{1}{2}}$.

注 对属于"1^{∞}"型的幂指函数 $u(x)^{v(x)}$,应首先将其化成

$$u(x)^{v(x)}=\{[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\}^{[u(x)-1]\cdot v(x)},$$

然后求$\lim[u(x)-1]\cdot v(x)=k$,则 $\lim u(x)^{v(x)}=e^k$.

思考

(1) 利用两个重要极限求极限时,应注意什么?

(2) 下列计算是否正确?若有错误请指出错误之处.

① $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\tan x}$;　　② $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)^{\sec x}$.

解　① 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{x}{\tan x}\right)=1$.

② 由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2\cos x)=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec x=\infty$,且1的任何次方都等于1,故原式 $=1$.

习题 1-5

(1) 求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin x}{2x}$;

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2x}$;

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2\sin^3 x}$;

⑥ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

⑦ $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\tan\dfrac{\pi x}{2}$;

⑧ $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(\pi-\arccos x)^2}{1+x}$;

⑨ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{|x|}$.

(2) 求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;

② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}-1}$;

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x}$;

④ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x}$;

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\cot x}$;

⑥ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$;

⑦ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{-x}}{x}$;

⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$;

⑨ $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+2)-\ln n]\}$;

⑩ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$.

(3) 设 $\left[\dfrac{1}{x}\right]$ 是小于或等于 $\dfrac{1}{x}$ 的最大整数,求证 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

第六节　无穷小的比较

我们已经知道,无穷小的极限为0.在自变量的某一变化过程中几个无穷小都趋向于零,但是它们趋向于0的速度可能会有很大的差别.在实际应用中,为了简化讨论过程,往往抛弃一部分无关紧要的无穷小,这时自然要选其中趋向于0的速度最快的无穷小舍去,这就遇到了无穷小的比较问题,即引进无穷小的阶的概念.

一、无穷小的比较

假设有若干不同的无穷小,例如,当 $x\to 0$ 时,$x,x^2,\sin x,\cos x-1$ 都是无穷小,显然,x^2 要比 x 趋向于0的速度快的多.但在数学上一般都是按无穷小之比的极限来给它们分等级的,如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ 等都反映了无穷小趋向于零的速度的快慢程度,下面我们给出有关无穷小阶的定义.

定义　设 α 与 β 是自变量在同一变化过程中的两个无穷小,则在所讨论的过程中有:

(1) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 0$,则称 α 是比 β **高阶的无穷小**,记作 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to\infty$,则称 α 是比 β **低阶的无穷小**.

(3) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to c\neq 0$,$c$ 为常数,则称 α 与 β 是**同阶无穷小**.

(4) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta}\to 1$,则称 α 与 β 是**等价无穷小**,记作 $\alpha\sim\beta$.

(5) 若 $\dfrac{\alpha}{\beta^k}\to c\neq 0(k>0)$,则称 α 是关于 β 的 $\boldsymbol{k}$ **阶无穷小**.

例1　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,所以当 $x\to 0$ 时,x 与 $\sin x$ 是等价无穷小,即 $x\sim\sin x$,同理,当 $x\to 0$ 时,$x\sim\tan x$.

例2　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=\infty$,所以当 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x)$ 是比 x^2 低阶的无穷小.

例3　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}=1$,所以当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{1}{2}x^2$ 与 $1-\cos x$ 不仅为同阶无

穷小，而且还是等价无穷小，即 $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$.

例 4　当 $x \to 0$ 时，试判别下列无穷小是 x 的几阶无穷小？

(1) $x(1-\cos x)$；(2) $\tan x+\sin 2x$；(3) $\sqrt{x}-3x^2+x^3$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{x^3}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to 0$ 时，$x(1-\cos x)$ 是 x 的 3 阶无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+\sin 2x}{x}=3$，所以当 $x\to 0$ 时，$\tan x+\sin 2x$ 是 x 的 1 阶无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-3x^2+x^3}{\sqrt{x}}=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{x}-3x^2+x^3$ 是 x 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶无穷小.

当 $x\to 0$ 时，有如下一些等价无穷小，它们在求极限的过程中经常用到，希望读者能够识记和理解.

$$x\sim \sin x,\ x\sim \tan x,\ 1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2,\ \ln(1+x)\sim x,\ e^x-1\sim x,\ \sqrt[n]{1+x}-1\sim \frac{1}{n}x.$$

前 5 个等价无穷小在前面的例题中已经得到证实，下面来证明最后一个. 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x\left[1+\sqrt[n]{1+x}+\cdots+(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{nx}{x\left[1+(1+x)^{\frac{1}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{n-1}{n}}\right]}=\frac{n}{n}=1.$$

故有 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim \dfrac{1}{n}x$.

二、利用等价无穷小代换求极限

在极限计算中，经常使用下述等价无穷小的代换定理，从而使两个无穷小之比的极限问题简化.

定理 1(无穷小的等价代换定理)　设在自变量的同一变化过程中 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在(或 ∞)，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}(\text{或 }\infty).$$

证　因为 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，所以 $\lim\dfrac{\alpha'}{\alpha}=1$，$\lim\dfrac{\beta}{\beta'}=1$，若 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}\right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

若 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \infty$，则 $\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 0$，于是$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'} = 0$，所以$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.

推论 1　若在自变量的同一变化过程中 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且$\lim \frac{\beta'}{\alpha'} f(x)$ 存在(或 ∞)，则$\lim \frac{\beta}{\alpha} f(x)$ 也存在(或 ∞)，且有

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} f(x) = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} f(x).$$

证　由定理 1 的证明过程知

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} f(x) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} f(x) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} f(x) = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} f(x).$$

推论 2　若$\lim \alpha' f(x)$ 存在(或 ∞)，则$\lim \alpha f(x) = \lim \alpha' f(x)$，其中 $\alpha \sim \alpha'$.

证　由定理 1 的证明过程知

$$\lim \alpha f(x) = \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \alpha' f(x) = \lim \alpha' f(x).$$

这些推论说明，在乘积或商的极限运算中，无穷小因子可用等价无穷小来代换，这样就可使极限的运算简化.

例 5　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}$($a$，$b$ 为常数).

解　(1) 当 $x \to 0$ 时，$\tan 2x \sim 2x$，$\sin 3x \sim 3x$，因此

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

(2) 当 $x \to 0$ 时，$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$，$\sin x \sim x$，因此

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x \cdot x} = \frac{1}{2}.$$

(3) 当 $x \to +\infty$ 时，$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$，因此

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln[2^x \cdot (1 + 2^{-x})]}{x}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\ln 2 + \frac{\ln(1 + 2^{-x})}{x}\right] = \ln 2.$$

(4) 当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{a-b}{2}x\sim\dfrac{a-b}{2}x$，$e^{(a-b)x}-1\sim(a-b)x$，因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}\left[e^{(a-b)x}-1\right]}{2\cos\dfrac{a+b}{2}x\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}(a-b)x}{2\cdot\left(\dfrac{a-b}{2}x\right)\cdot\cos\dfrac{a+b}{2}x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}}{\cos\dfrac{a+b}{2}x}=1.\end{aligned}$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解法 1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

解法 2　因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$

这说明当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$. 但下面的解法是错误的.

错误解法　因为当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

就是说无穷小的等价代换只能代换乘、除因子，加、减因子不能代换.

例 7　试证明：如果 $\alpha\sim\beta$，则 $\alpha-\beta$ 是比 α（或 β）高阶的无穷小. 反之，如果 $\alpha-\beta$ 是比 α（或 β）高阶的无穷小，则 $\alpha\sim\beta$.

证　设 $\alpha\sim\beta$，则 $\lim\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=\lim\left[1-\dfrac{\beta}{\alpha}\right]=0$，故 $\alpha-\beta$ 是比 α 高阶的无穷小. 同理可证：$\lim\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}=0$，故 $\alpha-\beta$ 是比 β 高阶的无穷小.

设 $\lim\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}=0$，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{(\alpha-\beta)+\beta}{\beta}=\lim\left(1+\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}\right)=1$，故 $\alpha\sim\beta$.

思考

(1) 当 $x \to 0$ 时,$\sin x \sim x$,故有

$$\lim_{x \to 0}(1+\sin^2 x)^{\csc^2 x} = \lim_{x \to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \mathrm{e}.$$

这样做对吗?

(2) 当 $x \to 0$ 时,$2\sqrt{x}$ 是 x 的 $\frac{1}{2}$ 阶无穷小,$3x^2$ 是 x 的 2 阶无穷小,$7x^5$ 是 x 的 5 阶无穷小,那么,$2\sqrt{x}-3x^2+7x^5$ 是 x 的几阶无穷小?在求极限过程中,高阶无穷小是否可以忽略不计,即 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x^3+7x^5}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2$,这样做对吗?

习题 1-6

(1) 当 $x \to 0$(或 $x \to 0^+$)时,下列无穷小与 x 相比较,哪些是高阶无穷小?哪些是低阶无穷小?哪些是等价无穷小?

① $\sin x^2$;　② x^3+x;

③ $\sqrt[3]{x}$;　④ $1-\cos x$;

⑤ $\arctan x$;　⑥ $x+\sin x$.

(2) 当 $x \to 0$(或 $x \to 0^+$)时,下列无穷小与 x 相比较是几阶无穷小?

① $x^2+\sin^2 x$;　② $\sqrt{x}-\sin x$;

③ $\ln(1+3x)$;　④ $\dfrac{(x-1)x}{x+2}$.

(3) 利用等价无穷小代换定理求极限.

① $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin^4 x}{\sin x^3}$;　② $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{2x^3}$;

③ $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\arctan x}$;　④ $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-1}$;

⑤ $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{2x(1-\cos x)}{(\mathrm{e}^{x^3}-1)}$;　⑥ $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

第七节　函数的连续与间断

自然界中的许多现象,如气温变化、植物生长、小河流水等现象都是随着时间连续不断地运动和变化的,这种现象反映在函数关系上就是函数的连续性.所谓的连

续函数,从外部形态上看就是笔不离纸而画出的一条不间断的曲线. 当然,我们对函数连续性的理解不能只停留在直观感性的认识上,必须给“连续”一个精确的数学定义,才能对它进行深入的研究. 本节主要讨论连续函数的概念和间断的概念及其分类.

一、函数的连续性

在定义函数的连续性之前先来学习一个概念 —— 函数的增量.

1. 函数的增量

定义 1　设自变量 x 从它的初值 x_0 变到终值 x_1,则终值与初值之差 $x_1 - x_0$ 称为**自变量的改变量**(或**增量**),记为 $\Delta x = x_1 - x_0$. 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的某个邻域有定义,当自变量在此邻域内 x 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时,函数相应的改变量记为 Δy,则有

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

与自变量一样,函数的改变量也称为**函数的增量** Δy.

函数的增量是可正可负的. 若 $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$,则 $\Delta y > 0$;若 $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$,则 $\Delta y < 0$.

例 1　一块正方形的金属薄板,受热膨胀后,边长和面积都在增大. 当边长有一增量 Δx 时,求其面积 A 的增量.

解　设面积与边长的函数关系为 $A = x^2$,当自变量 x 有一个改变量 Δx 时,相应函数的增量为 ΔA.

$$\Delta A = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

2. 函数的连续性概念

定义 2　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果当 Δx 趋向于零时,函数相对应的增量 Δy 也趋向于零,即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 成立,则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

在定义 2 中,若令 $x = x_0 + \Delta x$,即 $\Delta x = x - x_0$,则当 $\Delta x \to 0$ 时,也就是当 $x \to x_0$ 时. 又因为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$,因而 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 可以改写为

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x) - f(x_0)] = 0,\text{即} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

因此,函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可叙述如下.

定义 3　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ 成立,则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**连续**,且称 x_0 为函数 $y = f(x)$ 的**连续点**.

更直观一些又可表述为:函数在一点连续应满足 3 个条件:

① 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义;

② $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;

③ 极限值等于该点的函数值 $f(x_0)$.

如果借用极限定义的"ε-δ"语言,连续性的定义又可表述如下.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,如果对于任意给定的小正数 ε,总存在正数 δ,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 **连续**.

定义 4 如果函数 $y=f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$(或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$),则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**左(或右)连续**.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内有定义,如果有 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$,那么我们就称函数 $y=f(x)$ 在右端点 b **左连续**;如果 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$,那么我们就称函数 $y=f(x)$ 在左端点 a **右连续**.

定义 5 如果一个函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续,则称函数 $y=f(x)$ 在**开区间 (a,b) 内连续**.如果一个函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,又在左端点 a 右连续,右端点 b 左连续,则称函数 $y=f(x)$ 在**闭区间 $[a,b]$ 上连续**.如果函数 $y=f(x)$ 在整个定义域内连续,则称该函数为**连续函数**.

定理 1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 既左连续又右连续.

例 2 证明 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

证 任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,当 x 在点 x_0 有增量 Δx 时,y 的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0=-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right]=-\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=0.$$

所以 $y=\cos x$ 在点 x_0 是连续的.由于点 x_0 是 $(-\infty,+\infty)$ 内任取的,故 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

可类似地证明 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内也是连续的.

注 连续函数的图像是一条连续而不断的曲线.

通过上面的学习我们已经知道函数的连续性了,同时我们可以联想到,若函数在某一点不连续,会出现什么情形呢?下面我们就来讨论这个问题:函数的间断点.

二、函数的间断点

定义 6　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域或去心邻域内有定义，如果 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，此时点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**间断点**.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，一定属于下列三种情形之一：

(1) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处无定义.

(2) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，并且函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在，则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**；若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

下面举例说明函数间断点的几种常见类型.

例 3　考察函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　由于函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义，所以函数在 $x=0$ 处是间断的. 又由于

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

所以点 $x=0$ 是函数的第一类间断点.

这种间断点是因在该点没有定义造成的，只要补充定义，即令 $f(0)=0$，就能使函数在点 $x=0$ 连续，所以这种间断点也称为**可去间断点**.

例 4　考察函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解　由于 $f(x)$ 是分段函数，$x=0$ 是 $f(x)$ 的分段点，又因为

$$\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0,\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,f(0)=1.$$

函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 是右连续的，但不是左连续，所以，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是间断的(或称函数在点 $x=0$ 右连续).

又由于函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的左、右极限虽都存在，但不相等，所以点 $x=0$ 是函数的第一类间断点，又称这种间断点为**跳跃间断点**.

例 5　考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 在 $x=-1$ 处的连续性.

解 由于函数在点 $x=-1$ 处没有定义,所以函数在 $x=-1$ 处间断. 又因为 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{x+1}=\infty$,极限不存在且趋于无穷,所以 $x=-1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ 的第二类间断点,又称这种间断点为**无穷间断点**.

例 6 考察函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 由于函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 无定义,故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的间断点. 又因为当 $x\to0$ 时,$\cos\dfrac{1}{x}$ 的值在 -1 到 1 之间变化无限多次,我们称 $x=0$ 是函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点中的**振荡间断点**.

三、连续函数的运算法则

1. 连续函数的四则运算

通过函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则,可得出以下结论.

定理 2 若 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 处都连续,则 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq0)$ 也在点 x_0 处连续.

推论 1 有限个在某点连续的函数的代数和仍是一个在该点连续的函数.

推论 2 有限个在某点连续的函数的乘积仍是一个在该点连续的函数.

以上定理和推论的证明由读者自己来完成.

例 7 因为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都是连续函数,所以 $\tan x,\cot x,\sec x$ 和 $\csc x$ 在定义域区也都是连续的.

2. 反函数的连续性

定理 3 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增(或单调减)且连续,那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应的区间 $[\alpha,\beta]$ 上也是单调增(单调减)且连续.

例 8 函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调增且连续,它的反函数 $y=\arcsin x$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上也是单调增且连续的.

3. 复合函数的连续性

定理 4 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 连续,且 $u_0=\varphi(x_0)$,而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 连续,那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续,且有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

定理 4 通俗地讲就是:① 两个连续函数复合后所得的新函数仍为连续函数;② 在连续的条件下,极限运算和函数运算可以交换运算次序.

例 9　$y=\sin e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是连续的.这是因为 $y=\sin u$ 和 $u=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上都是连续的,从而 $y=\sin e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上也是连续的.

定理 5　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的极限存在,且 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$,而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续,那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处的极限存在,且有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

例 10　求$\lim\limits_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解　函数 $y=\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 可看作是由 $y=\cos u$ 与 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 复合而成,而当 $x\to 0$ 时,函数 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的极限为 e,且函数 $y=\cos u$ 在点 $u=e$ 处连续,由定理 5 知,函数运算和极限运算可以交换运算次序,即

$$\lim_{x\to 0}\cos(1+x)^{\frac{1}{x}}=\cos[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\cos e.$$

例 11　求$\lim\limits_{x\to\infty}[(x+5)\ln(x+5)-2(x+4)\ln(x+4)+(x+3)\ln(x+3)]$.

解　$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{(x+5)^{x+5}}{(x+4)^{x+4}}-\ln\frac{(x+4)^{x+4}}{(x+3)^{x+3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x+4}\right)^{x+4}+\ln(x+5)-\ln\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}-\ln(x+4)\right]$$

$$=\ln e-\ln e+\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+5}{x+4}=\ln 1=0.$$

4. 初等函数的连续性

通过前面所学的概念和性质,我们可得出以下结论:

五种基本初等函数在它们的定义域内都是连续的,一切初等函数在其定义区间内也都是连续的.

由此可知,计算初等函数在其定义区间内某点的极限时,只要计算函数在该点的函数值即可.若 $f(x)$ 是初等函数,且 x_0 是定义域区间内的一点,则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

例 12　求$\lim\limits_{x\to 1}\sin(\ln x)$.

解　因为 $x=1$ 是函数 $y=\sin(\ln x)$ 的连续点,所以$\lim\limits_{x\to 1}\sin(\ln x)=\sin(\ln 1)=0$.

例 13　a,b 为何值时,函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{4n-1}+ax^4+2bx^3}{x^{4n}+1},-\infty<x<+\infty$$

为连续函数?

分析 应先通过求极限把 $f(x)$ 写成分段表示式,再讨论它的连续性.

解 首先明确在该极限中 n 是变量,x 是常数.根据 x 在不同区间上取值可得

$$f(x)=\begin{cases} ax^4+2bx^3, & |x|<1, \\ \dfrac{1}{x}, & |x|>1, \\ \dfrac{1+a+2b}{2}, & x=1, \\ \dfrac{-1+a-2b}{2}, & x=-1. \end{cases}$$

显然,$f(x)$ 在区间$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,+\infty)$上连续.要使其为连续函数,只要使其在分段点 $x=\pm 1$ 处连续即可.

因

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x}=-1,\lim_{x\to-1^+}(ax^4+2bx^3)=a-2b,f(-1)=\frac{-1+a-2b}{2},$$

故有

$$\begin{cases} \dfrac{-1+a-2b}{2}=-1, \\ a-2b=-1. \end{cases}$$

同理

$$\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1,\lim_{x\to1^-}(ax^4+2bx^3)=a+2b,f(1)=\frac{1+a+2b}{2},$$

故有

$$\begin{cases} \dfrac{1+a+2b}{2}=1, \\ a+2b=1. \end{cases}$$

解上面的方程组得 $a=0,b=\dfrac{1}{2}$.

于是当 $a=0,b=\dfrac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

注 ① 判断分段函数在分段点处是否连续,一般须考虑在该点的左、右极限是否存在或是否相等;若其左、右极限存在且相等,还要进一步考察极限值是否等于该点的函数值,仅当极限值等于函数值时,函数才在该点连续.

② 研究分段函数的连续性时,不仅要研究其在分段点处的连续性,还要研究其在定义域内其他所有点的连续性.

思考

（1）为什么说初等函数在它的“定义区间”连续，而不说在“定义域”上连续？讨论初等函数 $y=\sqrt{\sin x-1}$ 和 $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{x+1}+4}$ 在“定义域”上的连续性.

（2）若 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，$f(x)$ 在点 x_0 的左、右极限存在且相等，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续.这种说法对吗？请举例说明.

习题 1-7

（1）利用函数连续性定义证明函数 $y=\sin x$ 在其定义域内是连续的.

（2）求下列函数的间断点，并判断间断点的类型.

① $y=\dfrac{2}{x^2-1}$；　② $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

③ $y=e^{\frac{1}{x}}$；　④ $y=x\cos\dfrac{1}{x}$；

⑤ $y=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1+2x, & 1\leqslant x<2,\\ 1+x^2, & x\geqslant 2;\end{cases}$　⑥ $y=\begin{cases}1+x\cos\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x>0.\end{cases}$

（3）讨论下列分段函数在分段点处的连续性.

① $y=\begin{cases}x^2+1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$　② $y=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1;\end{cases}$

③ $y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$　④ $y=\begin{cases}|x|, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{x}{|x|}, & 1<|x|\leqslant 3;\end{cases}$

⑤ $y=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$　⑥ $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0,\\ x^2, & x>0.\end{cases}$

（4）设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 3x^2-2x+k, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

其中 k 为常数，问当 k 为何值时，函数 $f(x)$ 在其定义域内连续？为什么？

（5）选择常数 a，使函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数.

(6) 求极限,并指出每一步的依据.

① $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x^2-3x+4}$;　　② $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1}{\left(\cos x-\dfrac{x}{\pi}\right)^2}$;

③ $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$;　　④ $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{e^{2x}+2x+3}$;

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$;　　⑥ $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

第八节　闭区间上连续函数的性质

对于闭区间$[a,b]$上的连续函数有一些特性在今后的微分和积分研究中经常会用到,下面我们来学习这些性质.

一、最大值和最小值定理

定理 1(最大值和最小值定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上一定能取到最大值和最小值.

也就是说,存在 $\xi_1,\xi_2\in[a,b]$,使得对一切 $x\in[a,b]$,有 $f(\xi_2)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_1)$. 其中 $f(\xi_1)$ 和 $f(\xi_2)$ 分别称为函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上的最大值和最小值(见图 1-10).

注　定理中"闭区间"和"连续"两个条件缺一不可. 对于在开区间上的连续函数或闭区间上有间断点的函数,结论不一定正确.

例如,函数 $y=x$ 在$(0,1)$内既没有最大值,也没有最小值;又如函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间$[0,2]$上有间断点 1,它在此区间上没有最大值,也没有最小值(见图 1-11).

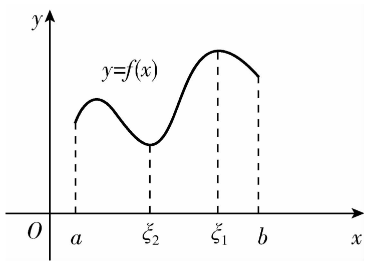

图 1-10

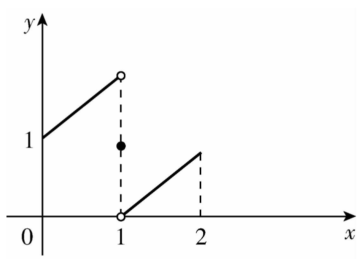

图 1-11

定理 2(有界性定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上一定有界.

证 函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,由定理 1 知,函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上一定存在最大值 M 和最小值 m,使得对一切 $x\in[a,b]$,有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 取 $K=\max\{|M|,|m|\}$,则有 $|f(x)|\leqslant K,x\in[a,b]$. 所以,函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有界.

例 1 证明:若 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,则 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内必有界.

分析 根据有界性定理可知,在闭区间$[-X,X](X>0)$上连续,即当$|x|\leqslant X$时,$f(x)$一定有界,现在只要证其在$|x|>X$时,$f(x)$有界即可.

证 由题设可知,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,不妨设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$,若取$\varepsilon=1$,则存在$X>0$,当$|x|>X$时,总有$|f(x)-a|<\varepsilon=1$,即$|f(x)|<1+|a|$.

另一方面,又 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,所以在闭区间$[-X,X](X>0)$上连续,因此当$|x|\leqslant X$时,$f(x)$一定有界,即存在$M_0>0$,使$|f(x)|\leqslant M_0$.

若取 $M=\max\{M_0,1+|a|\}$,则对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,均有$|f(x)|<M$,即 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

二、介值定理

定理 3(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$.

定理 3 的几何意义是:连续曲线 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少有一交点(见图 1-12).

推论 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$ 必取得最大值和最小值之间的一切值.

证 设 $f(x_1)=M,f(x_2)=m$,且有 $M\neq m$(M 和 m 分别为 $f(x)$ 的最大值和最小值). 应用定理 3,存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$,使得 $f(\xi)=\mu(m<\mu<M)$.

在介值定理中,如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,并取 $C=0$,即可得如下定理.

定理 4(零点定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

定理 4 表明,对于方程 $f(x)=0$,若满足定理中的条件,则方程在(a,b)内至少存在一个实根 ξ,ξ 又称为函数的**零点**,此时定理 4 又称为**根的存在定理**(见图 1-13).

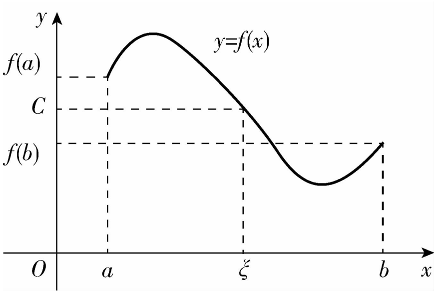

图 1-12

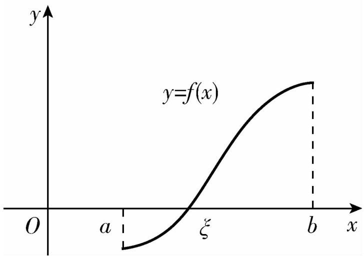

图 1-13

例 2　证明方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

证　设函数 $f(x)=x-\cos x$,则该函数在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内连续,且有 $f(0)=-1<0$,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}>0$. 由根的存在定理得,在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=\xi-\cos\xi=0$,即方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

例 3　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $a<c<d<b$,证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$

成立,其中 p,q 均为任意的正常数.

分析　要证 $f(\xi)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$,只要说明其介于最大值与最小之间,即

$$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M,$$

然后,再利用介值定理的推论即可得证.

证法 1　因 $f(x)$ 在 $[c,d]\subset(a,b)$ 上连续,设 M,m 分别为 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上的最大值与最小值,于是

$$m\leqslant f(c)\leqslant M,m\leqslant f(d)\leqslant M,$$

又由于 p,q 均为正数,故

$$m(p+q)\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant M(p+q),$$

即

$$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M,$$

由介值定理的推论可得,至少存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$,使 $f(\xi)=\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}$,

即

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

注　若在$[a,b]$上使用介值定理,则只能得到在闭区间$[a,b]$上成立的ξ,而不是开区间(a,b)内.

证法 2　作辅助函数

$$F(x)=(p+q)f(x)-pf(c)-qf(d),$$

则问题归结为寻找$F(x)$的零点.

由题设知,$F(x)$在$[c,d]\subset(a,b)$上连续,又

$$F(c)=q[f(c)-f(d)],F(d)=p[f(d)-f(c)],$$

又由于p,q均为正数,故

$$F(c)F(d)=-pq[f(c)-f(d)]^2\leqslant 0.$$

(1) 当$f(c)=f(d)$时,$F(c)=F(d)=0$,则c,d均可取作所求ξ.

(2) 当$f(c)\neq f(d)$时,$F(c)\cdot F(d)<0$,则由零点定理可得,至少存在一$\xi\in(c,d)\subset(a,b)$,使$F(\xi)=0$,即

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi).$$

注　利用闭区间上连续函数的性质证明与中值ξ相关的命题,一般有两种方法:

① 直接法(利用介值定理的推论),关键步骤是说明$f(\xi)$介于最大值与最小之间;

② 间接法(利用零点定理),关键步骤是作辅助函数.

思考

(1) 我们知道闭区间上的连续函数一定有界,那么,若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上除了有限个第一类间断点外,处处连续.请问:函数$f(x)$在$[a,b]$上是否一定有界?如果你认为结论是肯定的,请给出证明;如果答案是否定的,请举出反例说明.

(2) 在零点定理中,其他条件不变,只是把“$f(a)\cdot f(b)<0$”换成“$f(a)<a$,$f(b)<b$”,结论仍然成立,你能证明这个结论吗?

习题 1-8

(1) 证明方程$\cos x-x+1=0$在$(0,\pi)$内至少有一个实根.

(2) 证明方程$x^3-9x-1=0$恰有三个实根.

(3) 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,且$f(0)=f(1)$,证明存在$x_0\in[0,1]$,使$f(x_0)=f\left(x_0+\dfrac{1}{4}\right)$.

(4) 证明方程 $x = a\sin x + b$ 至少有一个不超过 $a + b$ 的正根,其中 $a > 0, b > 0$.

(5) 证明曲线 $y = x^3 + 2x - 10$ 在 $x = 1$ 与 $x = 2$ 之间至少与 x 轴有一个交点.

(6) 设 $f(x) = \mathrm{e}^x - 2$,求证在区间 $(0,2)$ 内至少有一点 x_0,使 $x_0 = \mathrm{e}^{x_0} - 2$.

(7) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$,则在 $[x_1, x_n]$ 上必存在 ξ 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

本章小结

一、基本内容

函数与反函数的概念以及函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等在中学就已经很熟悉了,这里不再赘述.

1. 初等函数

(1) 基本初等函数. 基本初等函数:① 幂函数;② 指数函数;③ 对数函数;④ 三角函数;⑤ 反三角函数,这五种函数统称为基本初等函数.

(2) 复合函数. 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 $D(f)$,函数 $u = \varphi(x)$ 值域为 $Z(\varphi)$,当 $D(f) \cap Z(\varphi)$ 非空时,称 $y = f[\varphi(x)]$ 为由函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数,其中,x 为自变量,u 称为中间变量,y 为因变量.

(3) 初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算而构成的,并且可用一个式子表示的函数称为初等函数.

2. 分段函数

在实际问题中,有时会碰到在定义域内自变量的不同取值范围内,函数分别用不同的解析式表达,这类函数称为分段函数.

有的分段函数能用一个式子来表示,所以是初等函数. 比如,绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

有的分段函数不能用一个式子来表示,所以不是初等函数. 比如,符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

分段函数在分段点处的函数值、左右极限以及连续性等是重点内容.

3. 数列极限的定义(“ε-N”定义)和性质

(1)“ε-N”定义.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,$\exists$正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立.

(2) 数列极限的性质.

性质 1(唯一性)　若数列$\{x_n\}$有极限,则其极限是唯一的.

性质 2(有界性)　若数列$\{x_n\}$收敛,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则它有界.

性质 3(保号性)　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在正整数 N,当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

推论　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,且存在正整数 N,当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$),则有 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

性质 4(保序性)　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,且 $A>B$,则存在一个正整数 N,当 $n>N$ 时,不等式 $x_n>y_n$ 恒成立. 反之,若存在正整数 N,当 $n>N$ 时,不等式 $x_n>y_n$ 恒成立,且有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,则有 $A\geqslant B$.

性质 5(子列极限)　数列$\{x_n\}$收敛于 A 的充要条件是它的任意子列$\{x_{n_k}\}$($n_k\in\mathbf{N}^*$)都收敛于 A.

推论　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的充要条件是奇、偶子列都收敛于 A.

4. 函数极限的定义(“ε-M”定义和“ε-δ”定义)和性质

(1)“ε-M”定义.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,$\exists M>0$,当 $|x|>M$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(2)“ε-δ”定义.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

(3) 函数极限的性质.

性质 1(有界性定理)　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则必存在 x_0 的某一邻域,使得函数 $f(x)$ 在该邻域内有界,即存在正数 M 和 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)|\leqslant M.$$

性质 2(局部保号性)　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在常数 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,都有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

性质 3(唯一性定理)　如果函数 $f(x)$ 在某一变化过程中有极限,则其极限是唯一的.

5. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{\bigcirc\to 0}\dfrac{\sin\bigcirc}{\bigcirc}=1.$

只有当 $\bigcirc\to 0$ 时，才有$\dfrac{\sin\bigcirc}{\bigcirc}\to 1,\dfrac{\tan\bigcirc}{\bigcirc}\to 1.$

(2) $\lim\limits_{\Delta\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\Delta}\right)^{\Delta}=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{\bigcirc\to 0}(1+\bigcirc)^{\frac{1}{\bigcirc}}=\mathrm{e}.$

对于该极限，不管形式上是属于前者还是后者，其本质均属于“1^{∞}”型的幂指函数. 对于 $u(x)^{v(x)}$ 的极限，应首先将其化成

$$u(x)^{v(x)}=\{[1+(u(x)-1)]^{\frac{1}{u(x)-1}}\}^{[u(x)-1]\cdot v(x)},$$

然后再求$\lim[u(x)-1]\cdot v(x)=k$，最后求 $\lim u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{k}.$

6. 求极限问题的方法总结

(1) 利用极限的定义证明极限.

(2) 利用初等函数在定义域内连续求极限，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$

(3) 利用无穷小与无穷大的互倒关系求极限.

(4) 对有理函数，当 $x\to\infty$ 时，用 x 的最高次幂去除分子和分母. 一般的有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\infty, & \text{当 } m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m=n,\\ 0, & \text{当 } m>n,\end{cases}$$

其中 $a_0\neq 0,b_0\neq 0.$

(5) 利用等价无穷小的代换或无穷小的性质求极限. 常用的等价无穷小有：当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x$，$x\sim\tan x$，$x\sim\arcsin x$，$x\sim\arctan x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$，$(1+x)^{\alpha}\sim\alpha x$，$a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1).$

(6) 分解因式，约去使分母极限为零的公因式，再求极限.

(7) 乘以共轭根式，约去使分母极限为零的公因式，再求极限.

(8) 利用两个重要极限求极限.

(9) 利用极限的存在准则求极限.

(10) 利用极限与左右极限关系求极限.

以后还将学到：

(11) 利用洛比达法则求极限.

(12) 利用定积分定义求极限.

（13）利用级数收敛的必要条件求极限.

7. 函数的连续与间断

理解函数连续与间断的概念.要注意连续的定义中包括三个条件:① 函数在该点有定义;② 函数在该点有极限;③ 函数在该点的极限值等于在该点的函数值.

上述三个条件有一个不满足即为间断.间断点分第一类间断点(左右极限都存在.若相等为可去间断点;若不等则为跳跃间断点)和第二类间断点(包含无穷间断点和振荡间断点).

求函数间断点的方法:对于初等函数,只要找出无定义点,这样的点必是间断点,然后再通过考察其左、右极限,来判别间断点的类型.对于分段函数,在每一段上可以利用初等函数连续性的结论来验证,而在分段点处则必须用连续的定义来验证,由于分段点左、右两侧函数的表达式不同,因此要分别考察其左、右极限.

8. 连续函数的运算

连续函数的和、差、积、商(分母不为零)均为连续函数;连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数;基本初等函数在其定义域内是连续的;初等函数在其定义区间内是连续的.

9. 闭区间上连续函数的性质

① 最大值和最小值定理;② 有界性定理;③ 介值定理;④ 零点定理.

定理中闭区间和函数的连续性两个条件缺一不可,否则结论不一定成立.要注意这些定理的理论意义和实际应用,特别是最值定理和介值定理.

二、重点

（1）初等函数、复合函数的概念及复合函数的分解、基本初等函数的性质及图像.

（2）利用极限的四则运算法则、两个重要极限、等价无穷小代换等方法求极限.

（3）函数的连续性概念、函数间断点类型的判别、连续函数的介值定理和零点定理及其应用.

三、难点

（1）分段函数在分段点处的极限存在性和连续性的相关求解与讨论.

（2）极限的“ε-N”和“ε-δ”定义.

（3）闭区间上连续函数的最值定理与介值定理的综合应用.

复习题一

(1) 选择题.

① 函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 有界函数　　C. 单调函数　　D. 周期函数

② 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,则 $f(x)$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 奇偶性不确定

③ 下列函数能复合成一个函数的是(　　).

A. $y=f(u)=\ln u; u=g(x)=-x^2$

B. $y=f(u)=\sqrt{u}; u=g(x)=-5$

C. $y=f(u)=u^3; u=g(x)=\sin x$

D. $y=f(u)=e^{-u^2}, |u|<1; u=g(x)=3$

④ 当 $n\to\infty$ 时,与 $\sin^2\dfrac{1}{n}$ 等价的无穷小是(　　).

A. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　B. $\dfrac{1}{n}$　　C. $\dfrac{2}{n}$　　D. $\dfrac{1}{n^2}$

⑤ 下列变量在给定的变化过程中是无穷大的是(　　)

A. $-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}(x\to+\infty)$　　B. $\dfrac{x^2-1}{3x}(x\to 1)$

C. $\cos\dfrac{1}{x}(x\to\infty)$　　D. $e^{-\frac{1}{x}}(x\to 0^+)$

⑥ 要使函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 在 $x=0$ 处连续,应该补充 $f(0)$ 的数值是(　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. 0

⑦ 当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{1}{2}\sin x\cos x$ 较 x 是(　　).

A. 同阶无穷小　　B. 高阶无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 较低阶的无穷小

⑧ 下列数列中,收敛的数列是(　　).

A. $\left\{\dfrac{(-1)^n+1}{2}\right\}$　　B. $\{n^2\}$

C. $\{(-1)^2\sin n\}$　　D. $\left\{(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right\}$

⑨ 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+4n^2-6}{an^3-2n-1}=\dfrac{1}{3}$,则 $a=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. $\dfrac{1}{3}$

⑩ 设 $f(x)=\begin{cases}x+\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\cos x, & x>0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　　).

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 振荡间断点

(2) 填空题.

① 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x^2, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 则 $f(x-1)=$ ________.

② 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$ ________.

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(1+x)-\sin\ln x]=$ ________.

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{|x|}=$ ________.

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\ln(1+x)}=$ ________.

⑥ $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的间断点为________,其中____为第一类间断点,____为第二类间断点.

⑦ 设 $f(x)=\arcsin\dfrac{1-\cos x}{x^2}(x\neq 0)$,要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $f(0)=$ ________.

⑧ 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 则 $a=$ ________时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

⑨ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ ________.

⑩ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3}=$ ________.

(3) 求下列极限.

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^{72}(2x-1)^{28}}{(3x-4)^{100}}$;② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}$;③ $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

④ $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{-\frac{1}{x}}$;⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-\cot^2 x\right)$;⑥ $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x})$;

⑦ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 3x}$;⑧ $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$;⑨ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ k, & x=0,\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\end{cases}$ 求 k 的值使 $f(x)$ 连续.

(5) 指出函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$($n\in\mathbf{N}^*$,$-\infty<x<+\infty$)的间断点,判断其类型,并写出 $f(x)$ 的连续区间.

(6) 利用极限存在准则证明.

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{n!}=0$;

③ 数列$\sqrt{2}$,$\sqrt{2+\sqrt{2}}$,$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,… 的极限存在.

(7) 若 $f(x)$ 对一切 y,z 均有 $f(y+z)=f(y)f(z)$,且 $f(x)\neq 0$,试证:若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,则 $f(x)$ 必处处连续.

(8) 证明:当 $a_n>|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|$ 时,方程

$$a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0=0$$

在区间$(0,2\pi)$内至少有 $2n$ 个根.